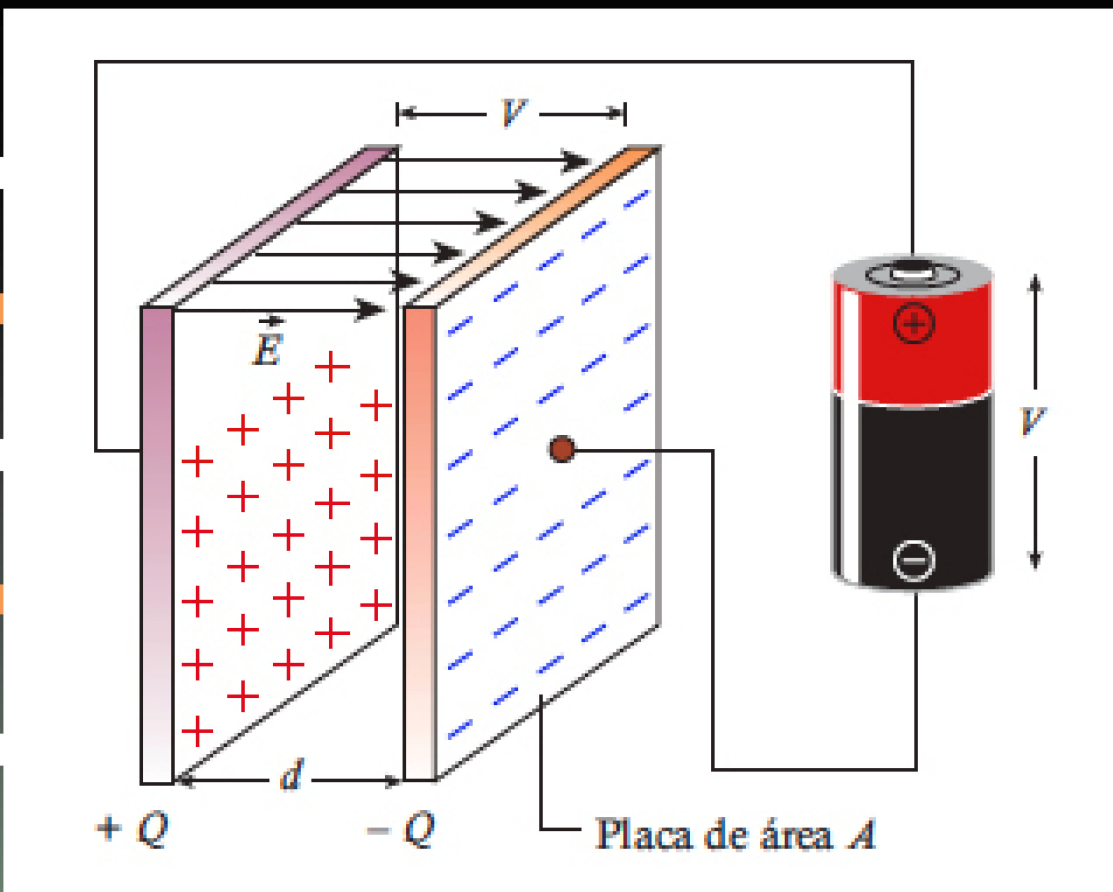


FÍSICA

Quinto Año de Bachillerato

JÚPITER FIGUERA – JUAN GUERRERO



Publitrax

The Textbook Company

FÍSICA 5to. Año Bachillerato: Júpiter Figuera y Juan Guerrero

Diseño de Portada: Júpiter Figuera

Composición de Textos y Diagramación:

Júpiter Figuera Yibirín.

Dibujos y Figuras:

Júpiter Figuera Yibirín, Ramón Vivas, Carlos Alfonzo, Carlos Alfonzo Suárez,
Wilfredo Zerpa (Koky)



Agradecimientos

Expresamos nuestro reconocimiento al Prof. Carlos Lezama, quien ha sido pilar fundamental en la corrección de todos nuestros libros de Física. Agradecemos, igualmente, a los profesores Estanislao Segura, Vilma Velásquez y María Soledad Rodríguez las observaciones hechas al documento original de esta obra. Muchos de los dibujos fueron fruto de la labor creativa de Ramón Vivas, Carlos Alfonzo y Wilfredo Zerpa (Koky).

Dedicatoria

A Amílcar Gómez, nuestro profesor de Matemática y Termodinámica en los predios universitarios, siempre inquieto pensador y profundo analista de los fenómenos físicos.

A nuestros amigos y compañeros del quehacer universitario: profesores Orlando Ayala, Ignacio Cavero y Víctor Carrizales



PREFACIO

El encuentro con la Física es un proceso que se inicia con el despertar de la conciencia del ser humano. En ese sendero se dan los primeros pasos, producto de las respuestas a los hechos naturales observados. Especial atención se le ha brindado a los fenómenos eléctricos, objetivo principal de este libro de texto. La electricidad siempre ha fascinado al intelecto del hombre y su origen es, todavía, uno de los secretos mejores guardados de la naturaleza.

Largo y fructífero ha sido el camino del estudio de los fenómenos eléctricos. Lo que en principio se limitaba a la admiración de las fuerzas de atracción y repulsión de objetos cargados, se convirtió, con el tiempo, en productos tecnológicos de gran significación para el desarrollo de los pueblos. Del estudio del electrón se pasó a las definiciones de campo y potencial eléctrico, para arribar al concepto de corriente eléctrica, el cual dio lugar a las primeras aplicaciones prácticas de la electricidad basadas en la resistencia eléctrica: el efecto calórico fue usado extensamente en el alumbrado público y residencial. También, la posibilidad de almacenar cargas eléctricas dio origen a los capacitores, de variadas e importantes aplicaciones en la vida cotidiana.

El estudio del magnetismo y su relación con el movimiento de cargas eléctricas desembocó en otro de los saltos tecnológicos de los tiempos modernos: la invención del motor, pieza inseparable de la industrialización a las más diversas escalas.

Muchos de los aspectos básicos de la electricidad son abordados en este texto. Como en nuestros libros de Física para Noveno Grado y Primer Año del Ciclo Diversificado, se ha hecho énfasis en los conceptos, como vía expedita y fundamental para facilitar los conocimientos en quienes exploran el interesante mundo de la Física.

Júpiter Figuera Yibirín

Juan Andrés Guerrero

Cumaná, enero 2004



Contenido

1	La carga eléctrica		
1.1	Estructura atómica de la materia.....	1	
1.2	Fuerzas fundamentales de la naturaleza.....	2	
1.3	Carga eléctrica.....	3	
1.4	Cuantización y conservación de la carga....	5	
1.5	Conductores y aislantes.....	6	
1.6	Inducción electrostática.....	8	
1.7	El electroscopio.....	9	
1.8	Peligros de la electricidad estática.....	10	
2	Ley de Coulomb		
2.1	Ley de Coulomb.....	13	
2.2	Forma vectorial de la ley de Coulomb.....	16	
2.3	Influencia del medio sobre las fuerzas entre las cargas.....	19	
2.4	Fuerza eléctrica y fuerza gravitacional.....	20	
2.5	Relámpagos y truenos.....	20	
3	El campo eléctrico		
3.1	Campo eléctrico.....	25	
3.2	Campo eléctrico debido a una carga puntual.....	26	
3.3	Líneas de fuerza de un campo eléctrico.....	30	
3.4	Campo eléctrico uniforme.....	33	
3.5	Movimiento de partículas cargadas en zonas de campos eléctricos uniformes.....	35	
3.6	Flujo eléctrico.....	38	
3.7	Ley de Gauss.....	41	
3.8	Conductores en un campo eléctrico.....	43	
3.9	Blindaje electrostático.....	45	
4	Potencial eléctrico		
4.1	Energía potencial eléctrica.....	52	
4.2	Energía potencial cuando el campo eléctrico es uniforme.....	55	
4.3	La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa.....	56	
4.4	Diferencia de potencial.....	57	
4.5	Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme.....	59	
4.6	Potencial absoluto.....	61	
4.7	Potencial creado por una carga puntual..	62	
4.8	Sistema de cargas: energía potencial electrostática.....	65	
4.9	Potencial debido a cuerpos esféricos cargados.....	66	
4.10	Superficies equipotenciales.....	68	
4.11	Potencial de un conductor en equilibrio electrostático.....	68	
5	Capacitancia		
5.1	Capacitores. Capacitancia.....	73	
5.2	Cálculo de la capacitancia.....	74	
5.2.1	Capacitancia de un capacitor plano.....	74	
5.2.2	Capacitancia de un capacitor cilíndrico.....	75	
5.2.3	Capacitancia de un capacitor esférico.....	76	
5.3	Efecto de un dieléctrico en un capacitor.....	77	
5.4	Energía en un capacitor.....	80	
5.5	Conexión de capacitores.....	82	
6	Corriente eléctrica continua		
6.1	Corriente eléctrica.....	91	
6.2	Efectos de la corriente eléctrica.....	92	
6.3	Fuentes de energía eléctrica.....	93	
6.4	Intensidad de corriente.....	96	
6.5	Corriente continua. Corriente variable....	98	
6.6	Densidad de corriente. Conductividad....	98	
6.7	Ley de Ohm. Resistencia.....	99	
6.8	Energía eléctrica.....	102	
6.9	El consumo de energía eléctrica.....	103	
7	Redes de corriente continua		
7.1	Circuitos eléctricos. Fuentes de energía..	110	
7.2	Análisis de redes: referencias para corrientes y voltajes.....	113	
7.3	Análisis de redes: leyes de Kirchhoff.....	113	
7.4	Resistores en serie.....	118	
7.5	Resistores en paralelo.....	119	
7.6	Método de las corrientes de malla para resolver una red eléctrica.....	123	



8

El campo magnético

8.1	Magnetismo.....	130
8.2	Naturaleza del campo magnético	133
8.3	Fuerza de interacción electromagnética	135
8.4	Expresión matricial del producto vectorial.....	139
8.5	Fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente.....	140
8.6	Fuerza y momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético.....	143
8.7	Momento dipolar magnético.....	148
8.8	Partícula cargada en un campo magnético uniforme.....	149

9

Instrumentos de medida

9.1	El galvanómetro.....	157
9.2	Sensibilidad de un galvanómetro.....	158
9.3	Uso del galvanómetro para medir la corriente directa.....	160
9.4	Amperímetros.....	160
9.5	Voltímetros.....	162
9.6	El puente de Wheatstone	164
9.7	El potenciómetro.....	164
9.8	El ciclotrón	165
9.9	El tubo de rayos catódicos.....	168
9.10	Medida de la relación carga/masa de electrones.....	169

10

Fuentes del campo magnético

10.1	Ley de Biot - Savart.....	173
10.2	Campo magnético creado por cargas puntuales en movimiento.....	175
10.3	Campo magnético creado por una corriente que circula en un conductor recto	176
10.4	Campo magnético creado en el centro de una espira circular	178
10.5	Campo magnético creado en un punto sobre el eje una espira circular.....	179
10.6	Fuerza magnética entre dos conductores.....	180
10.7	Campo magnético de un solenoide.....	181
10.8	Campo magnético de un toroide.....	182
10.9	Materiales magnéticos	184
10.10	El electroimán.....	186

11

Inducción electromagnética

11.1	El flujo magnético	191
11.2	Ley de inducción electromagnética de Faraday.....	193
11.3	Ley de Lenz.....	196
11.4	Fem de movimiento	198
11.5	Campo eléctrico y magnético inducidos.....	201
11.6	Autoinducción.....	204
11.7	Inductancia.....	205
11.8	Inductancia mutua.....	206
11.9	Máquinas eléctricas: generadores y motores	208
11.9.1	El generador de corriente alterna.....	208
11.9.2	El generador de corriente directa	209
11.9.3	Motores de corriente alterna y de corriente directa.....	210
11.10	El transformador.....	212

12

Corriente alterna sinusoidal

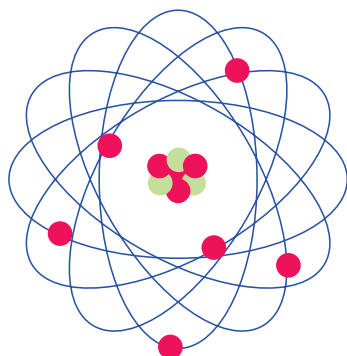
12.1	Generación de una corriente alterna sinusoidal.....	221
12.2	Ángulo de fase. Diferencia de fase.....	224
12.3	Voltaje y corriente en redes resistivas.....	225
12.4	Representación de voltajes y corrientes como vectores rotatorios. Fasores.....	226
12.5	Valor promedio y valor eficaz de una onda alterna sinusoidal.....	230
12.6	Onda alterna aplicada a un inductor...	232
12.7	Onda alterna aplicada a un circuito RL. Impedancia.....	233
12.8	Onda alterna aplicada a un capacitor..	235
12.9	Onda alterna aplicada a un circuito RLC en serie.....	237
12.10	Potencia en circuitos de corriente alterna.....	241



Bibliografía.....	247
-------------------	-----



Respuestas a los problemas.....	248
---------------------------------	-----



CAPÍTULO 1

LA CARGA ELÉCTRICA

1.1 ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA

La teoría actual sobre la constitución de la materia establece que todas las sustancias están formadas por *átomos* y *moléculas*. Estas últimas son asociaciones de átomos, arreglados de tal forma que cada disposición particular de los mismos da origen a diferentes tipos de materiales. Cada átomo consta de un *núcleo* con una cantidad determinada de *protones* y *neutrones*, de acuerdo a la sustancia de la cual se trata. Alrededor del núcleo, en órbitas circulares o elípticas, giran los *electrones*. En la fig. 17.1 se muestran los modelos para los átomos de Neón y de Hidrógeno.

En el caso del átomo de Hidrógeno, el núcleo consta de un protón y un neutrón. Girando alrededor del núcleo se encuentra un solo electrón. Para el átomo de Neón el núcleo contiene 10 protones y 10 neutrones. Alrededor del núcleo hay dos órbitas externas. En la primera de ellas, la más cercana al núcleo, giran dos electrones, mientras que en la órbita más alejada del núcleo hay 8 electrones.

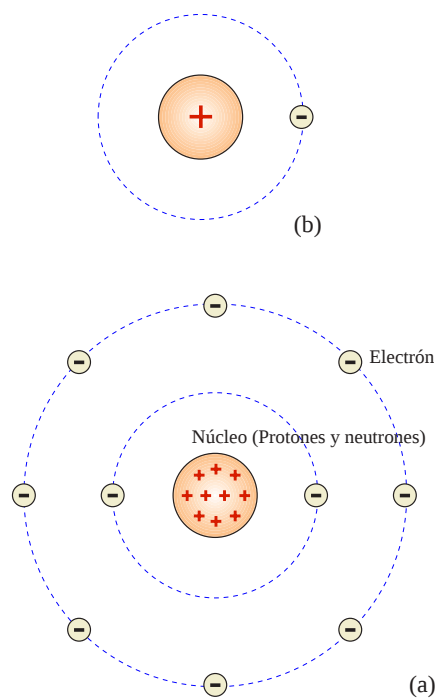


Fig. 1.1 a) Átomo de Hidrógeno. b) Átomo de Neón.

Los neutrones son partículas sin carga, los protones poseen carga positiva, mientras que los electrones tienen carga negativa. La carga de un protón es igual a la de un electrón, pero de signo opuesto.

En estado normal, todos los átomos son eléctricamente neutros; es decir, poseen el mismo número de

electrones y protones. Los electrones más alejados del núcleo, en la órbita más externa, son los responsables de las interacciones entre un átomo y otro, ya que la fuerza que los retiene ligados al núcleo es relativamente débil, en comparación con la fuerza ejercida sobre los electrones de órbitas internas.

Es interesante señalar que son las interacciones eléctricas y magnéticas (electromagnéticas) las responsables de que los átomos formen una unidad, que se agrupen para formar moléculas y que estas últimas se unan entre sí para dar origen a todos los objetos y sustancias que conocemos. En general, la existencia de cuerpos inanimados y de seres vivos sobre la superficie terrestre, sólo es posible por la existencia de fuerzas electromagnéticas.

El núcleo de un átomo contiene un número de protones acorde con el elemento químico del cual se trate. La masa del neutrón y del protón es, aproximadamente, la misma y del orden de 2.000 veces mayor que la masa del electrón. Experimentos físicos realizados arrojan los siguientes resultados para las masas de esas partículas en reposo:

$$\begin{aligned} \text{Masa del electrón } (m_e) &= 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ \text{Masa del protón } (m_p) &= 1,67261 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ \text{Masa del neutrón } (m_n) &= 1,67492 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

En cuanto a las dimensiones de un átomo, se ha demostrado experimentalmente que el radio típico del núcleo es del orden de $5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, mientras que el radio promedio típico de la nube electrónica (formada por las distintas órbitas) es del orden de $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Hay que hacer notar que hasta principios del siglo XX se pensaba que el átomo era indivisible. Los descubrimientos en esa época revelaron la presencia de electrones, protones y neutrones, corpúsculos a las cuales se llamó partículas elementales. A principios de 1945, haciendo chocar partículas elementales a altas velocidades, mediante el uso de aceleradores de partículas, se descubrieron muchas otras partículas, más de 300, muy inestables cuyas vidas medias eran muy cortas, entre 10^{-6} y 10^{-23} s . En la segunda mitad del siglo XX, los físicos realizaron significativos avances en el conocimiento

de la estructura de la materia, al establecer que todas las partículas, con excepción de protones, fotones y otras relacionadas con los mismos, están formadas por partículas más pequeñas, conocidas como *Quarks*. De esta forma, protones y neutrones, anteriormente considerados indivisibles, no son partículas elementales, sino conjuntos de Quarks fuertemente ligados entre sí. La carga de un Quark puede ser de $1/3$ o $2/3$ la carga de un electrón.

1.2 FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

A pesar de la gran diversidad de fuerzas que a diario observamos en nuestro entorno, todas las partículas de la naturaleza están sujetas a cuatro fuerzas o interacciones fundamentales: *fuertes*, *electromagnéticas*, *débiles* y *gravitacionales*.

La *interacción fuerte* es una fuerza de corto alcance y es la responsable de mantener unidos los protones y neutrones dentro del núcleo atómico y a los quarks dentro de protones y neutrones. La interacción fuerte es despreciable para distancias mayores que 10^{-14} m , valor que es cercano al diámetro medio del núcleo.

La *interacción electromagnética* tiene lugar entre partículas cargadas eléctricamente; puede dar origen a fuerzas de atracción o de repulsión, según sea el tipo de cargas que posean las partículas. Esta interacción predomina a distancias típicas correspondientes las dimensiones de átomos y moléculas y es responsable de mantener juntas a estas partículas. Es esta fuerza la responsable de constituir la materia, tal como la apreciamos en nuestro mundo cotidiano. La interacción electromagnética está en el orden de 10^{-2} veces la fuerza fuerte y es una fuerza de largo alcance, cuya intensidad disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia entre las cargas. Es importante mencionar que los protones, siendo partículas de signo positivo alojadas en el átomo del núcleo, se repelen entre sí con gran fuerza. De no ser por la interacción fuerte, ya mencionada, el núcleo del átomo se desintegraría, impidiendo la existencia de la materia, tal como la conocemos.

La *interacción débil* es una fuerza nuclear que se manifiesta a cortas distancias y es la responsable de la inestabilidad en ciertos núcleos atómicos. A esta fuerza se atribuye procesos de decaimiento

radiactivo, tal como la radiación beta, proceso en el cual se expulsa del átomo un electrón provisto de alta energía.

La *interacción gravitacional* es una fuerza que tiene gran alcance con una intensidad relativamente pequeña. Esta interacción produce una fuerza de atracción mutua entre todos los cuerpos o partículas que tienen la propiedad de tener masa. En la vida cotidiana, experimentamos su acción, cada momento, cuando vemos que cualquier cosa cae al

suelo al soltarla libremente. Aun cuando esta fuerza es la que mantiene en equilibrio a los grandes cuerpos siderales, tales como galaxias, estrellas y planetas, son insignificantes sus efectos sobre las partículas elementales, debido a las masas muy pequeñas de las mismas. En este sentido, la fuerza gravitacional es la más débil de las fuerzas fundamentales.

En la tabla 1.1 se presenta las relaciones entre las cuatro fuerzas fundamentales, incluyendo su alcance e intensidad, en relación a la fuerza fuerte.

INTERACCIONES FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA				
	Gravitacional	Electromagnética	Fuerte	Débil
Campos de Interacción	Mantienen en órbitas regulares el movimiento de planetas, estrellas y galaxias.	Mantiene la unión de átomos y moléculas.	Responsable de la estabilidad del núcleo atómico.	Regula la desintegración de núcleos atómicos.
Alcance	Infinito	Infinito	10^{-13} m	10^{-17} m
Intensidad Relativa	10^{-38}	10^{-2}	1	10^{-6}

Tabla 1.1 Comparación de las interacciones fundamentales en la naturaleza.

1.3 CARGA ELÉCTRICA

No existen registros precisos sobre el descubrimiento de los fenómenos eléctricos. A Thales de Mileto, uno de los “siete sabios” de la antigua Grecia, se le atribuye el haber observado la atracción que ejercía el ámbar, previamente frotado, sobre cuerpos livianos como pedacitos de papel. El ámbar es un tipo de resina fósil, de color amarillo y quebradizo, cuyo nombre en el idioma griego es “elektrón”. De esta palabra se derivan todos los términos relativos a los fenómenos eléctricos, que han copado la atención de la humanidad durante muchos años.

Aunque la electrización del ámbar como hecho experimental fue transmitido de una generación a otra, no se profundizó en la naturaleza del fenómeno en el transcurso de ¡2.000 años! No fue sino hasta comienzos del signo XVII, cuando el filósofo y médico de la Corte de la Reina Elizabeth, William Gilbert, estableció que, aparte del ámbar, muchos cuerpos podían ser electrizados por fricción. Gilbert fue quien acuñó el término “eléctrico” para designar

el efecto de atracción y repulsión de cuerpos cargados.

El fenómeno de atracción de objetos cargados puede fácilmente ser puesto en evidencia experimentalmente: si recortamos pedacitos muy pequeños de papel, los colocamos sobre una superficie plana y le acercamos un peine que previamente ha sido frotado en el cuero cabelludo, observaremos que los pedacitos de papel “vuelan” hacia el peine, tal como se indica en la fig. 17.2.

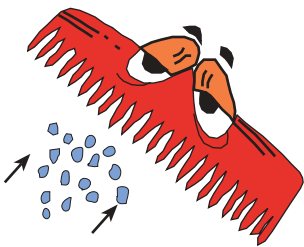


Fig. 17.2 Al frotar un peine y acercarlo a pedacitos de papel, éstos son atraídos por el peine.

Este simple experimento demuestra que el peine, o en su defecto otros objetos plásticos que se utilicen, han adquirido una propiedad a la cual se denomina *carga eléctrica*. Es decir, el peine se ha cargado eléctricamente o se ha *electrizado*.

Un experimento similar puede realizarse utilizando bolitas de anime de pequeño diámetro y colgándolas mediante hilos aislantes. Observemos el esquema planteado en la fig. 1.3: si frotamos una varilla de vidrio con un trapo de seda, la varilla de vidrio se electriza; es decir, adquiere una cierta cantidad de carga. Si ahora tocamos las bolitas de anime con la varilla de vidrio, éstas, a su vez, se electrizan. Si se colocan las bolitas de anime, una enfrente de la otra, se produce una fuerza de repulsión que las separa. Desde el punto de vista de la estructura de la materia, el fenómeno que tiene lugar es el siguiente: al frotar la varilla de vidrio con la tela de lana, aquella pierde electrones, que son transferidos a la tela, la cual queda cargada negativamente. Esto hace que la varilla adquiera una carga positiva, tal como se indica en la fig. 1.3(a). Al tocar las dos bolitas con la varilla de vidrio, fig. 1.3(b), los electrones de las mismas son transferidos a la varilla, quedando las pelotitas de anime con carga positiva. El hecho experimental mostrado en la fig. 1.3(c), que se manifiesta por la fuerza de repulsión que aparece en las bolitas cargadas positivamente, permite concluir que:

Dos objetos con cargas positivas se repelen.

Si ahora frotamos una varilla de plástico con un

pedazo de cuero, en un experimento similar al anterior, como se ilustra en la fig. 1.4, tiene lugar el siguiente proceso: en primer término, se produce una migración de electrones desde el cuero hacia la varilla. Como resultado, esta última adquiere una carga negativa, mientras que el cuero queda cargado positivamente, fig. 1.4(a). Al poner en contacto la varilla de plástico con las bolitas de anime, fig. 1.4(b), éstas captan electrones y quedan con un exceso de carga negativa. Al enfrenar las bolitas, como se muestra en la fig. 1.4(c), las mismas experimentan, también, una fuerza de repulsión que las separa. De lo anterior deducimos que:

Dos objetos con cargas negativas se repelen.

Finalmente, si tocamos una bolita de anime con la varilla de plástico y la otra con la varilla de vidrio, una vez que dichas varillas han sido cargadas por frotamiento, fig. 1.5, observaremos que al acercar las bolitas, éstas experimentan una fuerza de atracción.

Resumiendo los experimentos, podemos afirmar:

1. Los objetos pueden tener carga neta positiva, negativa o neutra.
2. Objetos con cargas del mismo signo se repelen.
3. Objetos con cargas de signos contrarios se atraen.

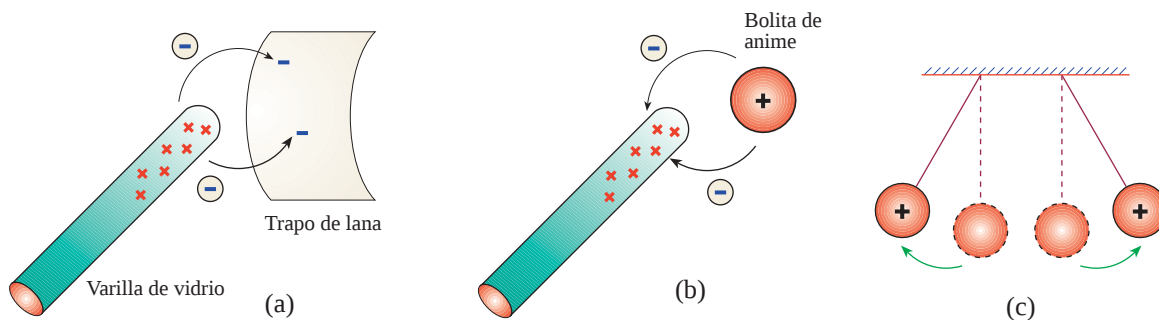


Fig. 1.3 a) Al frotar una varilla de vidrio con una tela de lana, la varilla queda cargada positivamente. b) Al tocar las bolitas de anime con la varilla de vidrio, se cargan positivamente, al perder electrones. c) Al enfrenarlas, las dos bolitas se repelen entre sí.

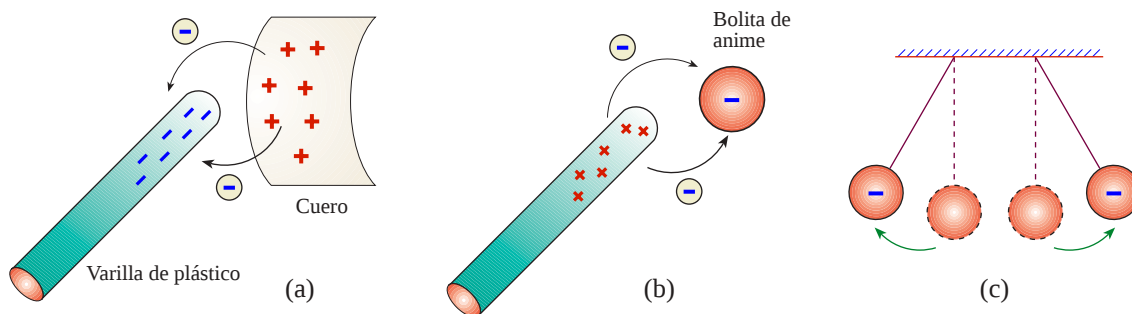


Fig. 1.4 a) Al frotar una varilla de plástico con un pedazo de cuero, la varilla queda con una carga negativa. b) Al tocar las bolitas de anime con la varilla de plástico, las mismas quedan cargadas negativamente, al ganar electrones. c) Las bolitas, cargadas negativamente, se repelen entre sí.

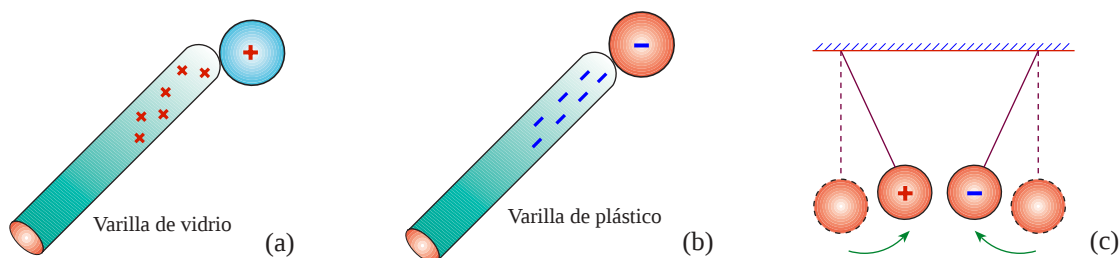


Fig. 1.5 Cuando se tocan dos bolitas de anime con varillas de vidrio y de plástico, se cargan con signos positivo y negativo, respectivamente y, al acercarlas, se produce una fuerza de atracción entre ellas.

Es importante destacar que la mayor parte de los cuerpos macroscópicos que nos rodean son eléctricamente neutros, puesto que el número de protones que posee es igual al número de electrones. Se dice que un cuerpo está electrificado, si contiene un exceso de partículas de un determinado signo. Así, tendrá carga positiva si el número de protones excede al de electrones y tendrá carga negativa si el número de electrones excede al de protones.

1.3 CUANTIZACIÓN Y CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Cuando decimos que una variable física está *cuantizada*, nos referimos a que ésta aparece en unidades discretas, que no pueden ser subdivididas. A la carga eléctrica no se le encuentra en cantidades arbitrarias, sino en múltiplos de una cantidad fundamental o *quantum*. Robert Millikan (1869-1993), un físico norteamericano, en un experimento clásico, conocido como experimento de la gota de aceite, demostró que la carga de un electrón está dada por:

$$\text{Carga de un electrón: } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulombs}$$

La unidad de carga se expresa en el sistema SI en *coulombs*. A la cantidad e se le conoce también como *carga elemental*. Cualquiera carga encontrada en la naturaleza es igual a esta carga elemental o a un múltiplo de la misma. Basado en este hecho, se dice que *la carga está cuantizada*. La cuantización de la carga constituye una ley natural fundamental. Esto significa que un cuerpo cargado negativamente, puede tener 40 electrones en exceso; pero no puede tener, por ejemplo, una carga de 40,5 electrones. Aun cuando se ha mencionado que los quarks pueden tener una fracción de la carga de un electrón, éstos no han sido aislados hasta el momento, lo que refuerza la ley de la cuantificación de la carga.

De acuerdo a lo estudiado en la sección 1.1, la carga de un protón es igual, pero de signo contrario, a la de un electrón. Por tanto, si asignamos un signo negativo a la carga de un electrón, podemos escribir:



Carga de un electrón: $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Carga de un protón: $+1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Cuando describimos el proceso de electrificación por frotamiento, decíamos que hay una transferencia de electrones de un cuerpo a otro. Así, cuando frotábamos una varilla de vidrio con un trapo de lana, los electrones emigraban desde el vidrio hacia la lana, con la particularidad de que el número de electrones perdidos por el vidrio era exactamente igual a los que ganaba la lana. Este caso particular no es sino un ejemplo de un principio más general, el cual establece que *la carga neta de un sistema aislado permanece constante*.

Por carga neta de un sistema se entiende la suma algebraica de las cargas positivas y negativas que se encuentran en dicho sistema.

Hasta ahora no se ha observado algún caso de destrucción o de creación de la carga eléctrica neta de un sistema aislado. Podemos, entonces, enunciar la *ley de conservación de la carga*, que establece:

La carga eléctrica de un sistema aislado no puede ser creada ni destruida, sólo puede ser transferida.

Es conveniente mencionar que cuando decimos que un cuerpo posee un *exceso de carga*, estamos afirmando que tiene un exceso de electrones (cuerpo cargado negativamente) o un exceso de protones (cuerpo cargado positivamente), en relación con su estado eléctricamente neutro, en el cual el número de protones es igual al número de electrones.

Finalmente, debemos mencionar que la carga eléctrica es una cantidad que no varía con la velocidad con que se mueve una partícula. Esto difiere, por ejemplo, de la masa de esa misma partícula, cuyo valor se incrementa a medida que la velocidad se acerca a la de la luz. Se dice, bajo esta condición, que la *carga es invariante*.

1.4 CONDUCTORES Y AISLANTES

Normalmente, desde el punto de vista eléctrico, los materiales son clasificados como *conductores* y

aislantes. Un buen conductor es un material en el cual los electrones de la capa más externa se pueden mover con facilidad a lo largo y ancho de su estructura interna. Esta propiedad permite que, ante la presencia cercana de cuerpos cargados eléctricamente, se produzcan desplazamientos de los electrones libres. Los metales como el cobre, el aluminio, el hierro, etc., son buenos conductores.

Los *materiales aislantes* o *aisladores* son malos conductores de la electricidad y, aunque pueden intervenir en el proceso de intercambio de electrones con otros cuerpos, los electrones de sus capas externas están tan atados al núcleo atómico, que el desplazamiento de los mismos, dentro de la estructura interna, es mínimo. Los plásticos y el papel seco son ejemplos de materiales aislantes. Un experimento que muestra la diferencia de comportamiento eléctrico entre conductores y aislantes, se indica en la fig. 1.6.

En la fig. 1.6(a), un cilindro metálico descansa sobre un vaso de vidrio, que lo aísla eléctricamente de la superficie sobre la cual éste último reposa. Una bolita muy liviana de un material aislante (por ejemplo, anime), recubierta con una capa metálica muy fina (por ejemplo, papel de aluminio) se pone en contacto con el cilindro metálico.

A continuación, fig. 1.6(b), una varilla de vidrio con carga positiva se pone en contacto con el cilindro metálico. Inmediatamente la bolita es repelida. ¿Qué ha sucedido? Debido a que la bolita y el cilindro son buenos conductores, sus electrones libres son atraídos por la varilla de vidrio. Estos electrones viajan fácilmente de un extremo al otro del cilindro. Como resultado de este movimiento de electrones hacia la varilla de vidrio, tanto la bolita como el extremo izquierdo del cilindro aparecen con un exceso de carga positiva, que causa la repulsión de la bolita.

Si ahora sustituimos el cilindro metálico por uno de plástico y lo tocamos con la varilla de vidrio cargada, observamos que la bolita no se mueve. La explicación es la siguiente: como el plástico no es buen conductor, sólo se produce transferencia de electrones en el punto de contacto con la varilla de vidrio; en el resto del cilindro no hay migración de cargas y, por tanto, en el extremo izquierdo del cilindro no tiene lugar efecto alguno.

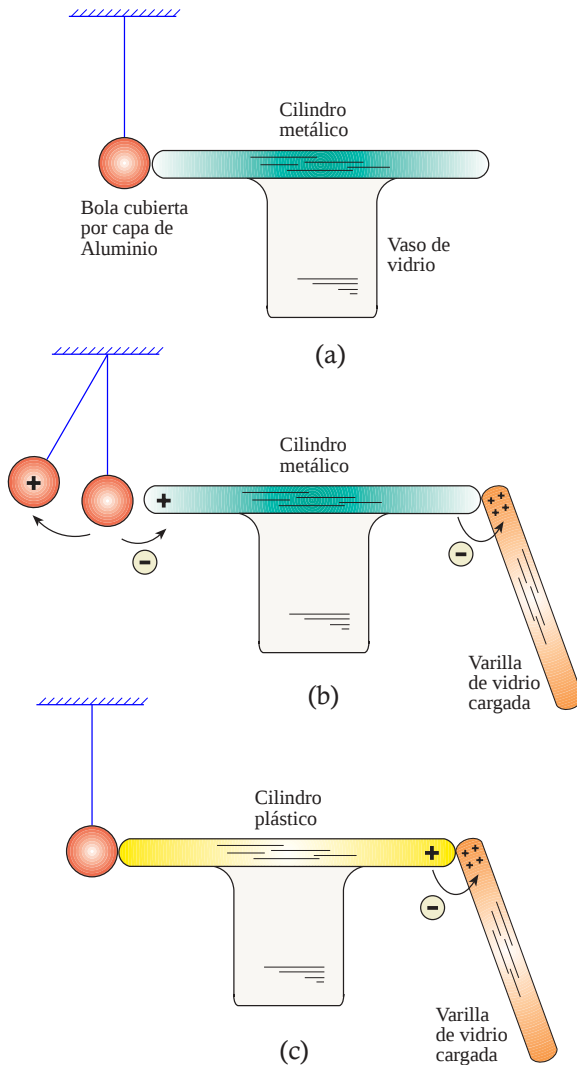


Fig. 1.6 a) Una bolita de material aislante con cubierta metálica se pone en contacto con un cilindro metálico, que descansa sobre un vaso de vidrio. b) Al poner en contacto una varilla de vidrio cargada con el cilindro metálico, la bolita es repelida. c) Cuando el cilindro metálico es sustituido por uno de plástico y se le toca con la misma varilla cargada, la bolita permanece en su lugar.

Existen sustancias que bajo ciertas condiciones se comportan como conductores o como aislantes. Así, el agua pura es un buen aislante, mientras que el agua de consumo en los hogares, por estar tratada con otros elementos químicos, tales como el cloro, que se utiliza para purificarla, es un buen conductor. A otros líquidos que son buenos conductores de la electricidad se les denomina *electrolitos*. Por ejemplo, el agua salada, obtenida por la adición de cloruro de

sodio (NaCl) al agua pura, produce una separación de los iones de sodio (Na^+) y de cloro (Cl^-) que la hacen buena conductora de la electricidad.

El aire seco, que bajo condiciones normales se comporta como un aislante, puede convertirse en un conductor cuando está ionizado. Este es el caso de la ionosfera, capa superior de la atmósfera, que bajo la acción de los rayos X y rayos ultravioletas provenientes del Sol, se hace conductora. En estas condiciones, bajo las cuales un gas se convierte en conductor, se habla de *plasma*, una mezcla de iones positivos y de electrones.

Por otra parte, en la naturaleza existen materiales que no son buenos conductores ni buenos aislantes. Se les conoce con el nombre de *semiconductores* y poseen sólo un número limitado de electrones libres dentro de su estructura. De estos materiales, los más notables son el silicio (Si) y el germanio (Ge), utilizados ampliamente en la fabricación de dispositivos electrónicos, tales como diodos y transistores. Cuando a los semiconductores se añade cantidades controladas de otros átomos, extraños a la estructura atómica de los mismos, éstos contaminan al material original, convirtiéndolo en un buen conductor. Al proceso de añadir impurezas se le conoce como *dopamiento*. Otros materiales semiconductores que podemos citar son el arseniuro de galio (GaAs) y el sulfuro de cadmio (CdS). En la fig. 1.7 se muestra una representación bidimensional de una estructura de silicio, a la cual se ha añadido un átomo *donador* de electrones. El silicio normalmente 4 electrones en su órbita más externa. Si el átomo donador es arsénico, el cual posee 5 electrones en su órbita externa, sobraría un electrón que puede moverse en la estructura atómica del silicio y que incrementa la capacidad del mismo para conducir.

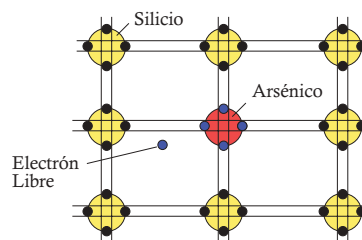


Fig. 1.7 Representación bidimensional de una estructura molecular de silicio, a la cual se ha añadido un átomo de arsénico, que proporciona un electrón libre.

Por último, podemos mencionar a los materiales *superconductores*, que son aquellos cuya resistencia al flujo de cargas eléctricas es prácticamente nula. Luego que se establece una corriente en este tipo de material, el flujo de cargas se mantiene por mucho tiempo, sin necesidad de fuentes externas. Un material superconductor casi no revela resistencia al paso de la corriente eléctrica, lo cual implica la supresión del calentamiento y las pérdidas de energía en el mismo. A pesar que la *superconductividad* fue observada inicialmente en algunos metales a temperaturas cercanas al cero absoluto (-273°), recientemente se han hecho grandes avances, que ponen en evidencia la superconductividad en algunos óxidos metálicos a temperaturas más altas (30° K). Mientras se avanza en esta área científica, la tecnología parece augurar cambios radicales en su concepción.

1.5 INDUCCIÓN ELECTROSTÁTICA

Anteriormente, hemos planteado la carga de un cuerpo mediante frotamiento, poniéndolos en contacto. La *inducción electrostática* es un método que se utiliza para cargar un conductor, sin ponerlo en contacto con un objeto electrizado. Supongamos dos cilindros metálicos, colocados sobre soportes aislantes y puestos en íntimo contacto, como se muestra en la fig. 1.8.

Si acercamos una varilla de vidrio con carga positiva al cilindro metálico del lado derecho, fig. 1.8(a), los electrones de ambos cilindros se mueven hacia la derecha, dejando al cilindro de la izquierda con un exceso de carga positiva y al de la derecha con un exceso de carga negativa. Si separamos las bases aislantes que soportan los cilindros metálicos, fig. 1.8(b), estos quedan cargados: el de la izquierda con carga positiva y el de la derecha con carga negativa.

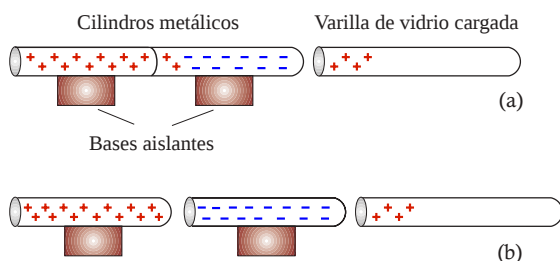


Fig. 17.7 Experimento para demostrar la inducción electrostática.

La inducción electrostática explica también cómo un conductor eléctricamente neutro, puede ser atraído por un cuerpo cargado. En la fig. 1.9 una varilla de vidrio, con carga positiva, se acerca a una bolita metálica. Los electrones de la bolita se pegan del lado izquierdo de la misma, produciendo una fuerza de atracción que acerca la bolita a la varilla. Por supuesto, también hay una fuerza de repulsión, debida a las cargas positivas en la varilla de vidrio y el conductor. Sin embargo, por encontrarse las cargas negativas más cercanas que las positivas a la varilla de vidrio, la fuerza de atracción es mayor que la de repulsión.

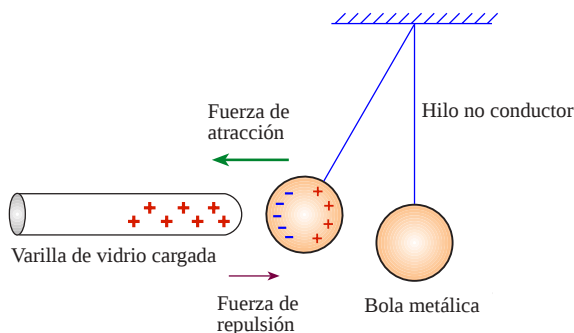


Fig. 1.9 Atracción de un conductor neutro por un cuerpo cargado.

Entre cuerpos aislantes también se pueden producir fuerzas eléctricas. Esto explica la atracción que se produce sobre pedacitos de papel, cuando se le acerca un cuerpo con carga positiva. Supongamos, por ejemplo, que se carga positivamente una varilla de vidrio. En la fig. 1.10 se ilustra esta situación. Las cargas negativas, aun cuando no pueden moverse libremente en el papel, se reacomodan en las moléculas del mismo para cargar negativamente la

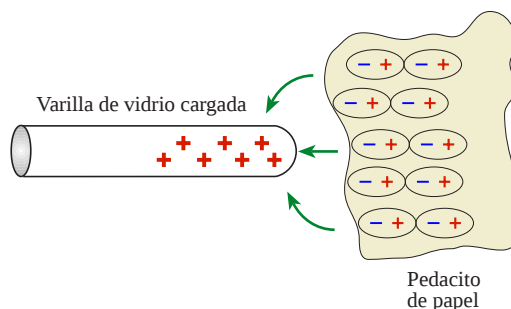


Fig. 1.10 Explicación de la atracción de un cuerpo aislante (pedacito de papel) por otro cuerpo aislante cargado (varilla de vidrio).

cara izquierda del pedacito de papel. Como las cargas negativas están más cerca de la varilla de vidrio, la fuerza de atracción es mayor que la fuerza de repulsión de las cargas positivas. La consecuencia es que los pedacitos de papel "saltan" hacia la varilla de vidrio.

A las moléculas de un material aislante cuyas cargas se orientan bajo la acción de un cuerpo externo, también cargado, se les denomina *moléculas polares*. Al estar las cargas separadas en las mismas, el centro de las cargas negativas no coincide con el centro de las cargas positivas. Cuando esta condición está presente, se dice que el aislante está *polarizado*. Hay que hacer notar que, aun cuando la carga total del material aislante sea nula, la distribución de las cargas negativas y positivas hace posible la manifestación de fuerzas de atracción o de repulsión cuando el aislante interacciona con cuerpos cargados.

1.6 EL ELECTROSCOPIO

El *electroscopio* es un instrumento utilizado para detectar la presencia de cargas eléctricas. En su versión más simple consiste de dos laminillas metálicas que cuelgan de un eje conductor, terminado en una bolita esférica conductora. El conjunto descansa sobre una jarra de vidrio, como se muestra en la fig. 1.11.

Veamos cómo se carga un electroscopio. En la fig. 1.12(a) una varilla de vidrio con carga positiva toca

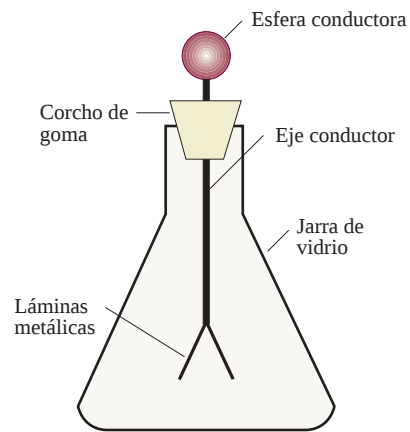


Fig. 1.11 Electroscopio de láminas metálicas.

a la esfera del electroscopio, haciendo que las láminas se separen. Esto se explica porque al tocar la esfera metálica con la varilla de vidrio, se transfieren electrones a esta última, dejando a ambas laminillas con cargas positivas, que generan una fuerza de repulsión entre las mismas. Cuando la esfera metálica se toca con una varilla de plástico cargada negativamente, fig. 1.12(b), hay una transferencia de electrones desde la varilla de plástico hacia el material conductor. Las dos laminillas metálicas se cargan negativamente y, de nuevo, se origina una fuerza de repulsión entre las mismas. En los dos casos mostrados, las laminillas adquieren cargas del mismo signo, que producen fuerzas de repulsión.

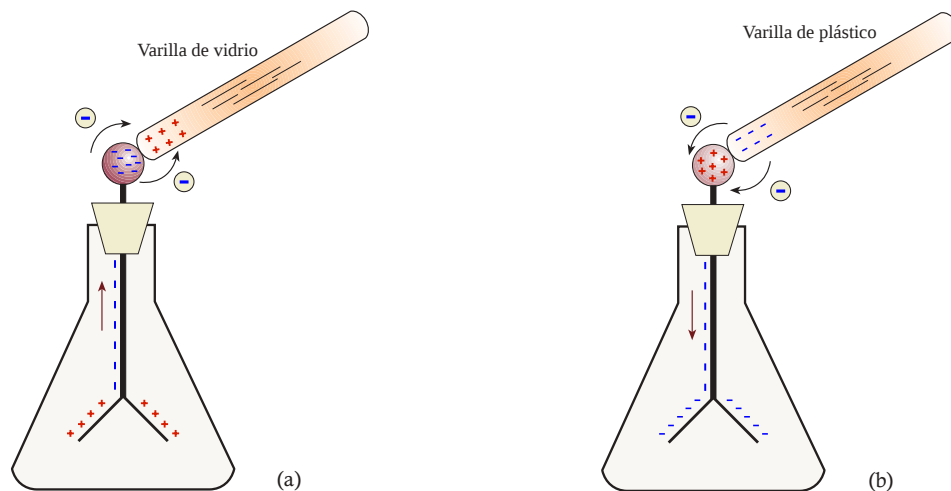


Fig. 1.13 Manera de cargar un electroscopio: a) Positivamente. b) Negativamente.

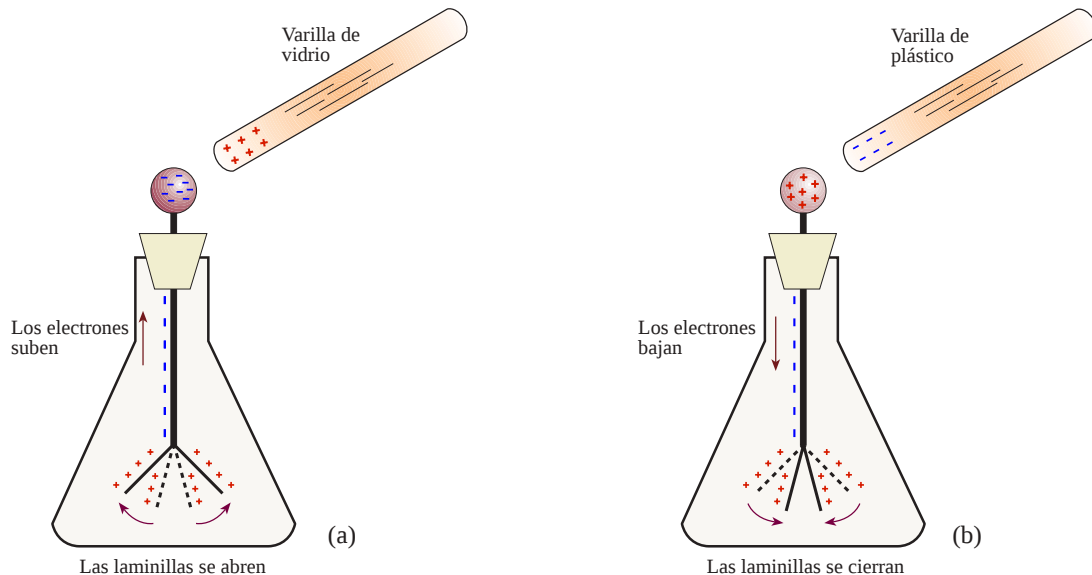


Fig. 1.13 Detección de cargas positivas y negativas mediante un electroscopio.

Un electroscopio cargado puede utilizarse para determinar si un cuerpo está cargado y el tipo de carga que posee. En la fig. 1.13(a), a un electroscopio con carga positiva se le acerca una varilla de vidrio, que tiene, también, una carga positiva. Al trasladarse electrones hacia la esfera del electroscopio, las laminillas del mismo adquieren una carga positiva mayor y se separan aun más. Por el contrario, cuando se acerca una varilla de plástico cargada negativamente, se desplazan electrones hacia las laminillas, que neutralizan algunas cargas positivas en las mismas. Como consecuencia, la fuerza de repulsión de las laminillas se hace menor y éstas se acercan, tal como lo ilustra la fig. 1.13(b).

1.7 PELIGROS DE LA "ELECTRICIDAD ESTÁTICA"

El desbalance de cargas, en cuerpos próximos entre sí, puede dar origen a descargas eléctricas que, en las condiciones apropiadas, puede representar graves riesgos y ocasionar accidentes de grandes proporciones. Todos hemos experimentado los efectos de las chispas que se producen al tocar a una persona cuando estamos cargados. Otras veces, estas chispas surgen al hacer contacto con un objeto metálico. El efecto se nota visualmente por el pequeño relámpago que se observa. El proceso de

carga tiene lugar cuando frotamos nuestro cuerpo con alfombras y otros objetos capaces de ceder o aceptar electrones. Este hecho también tiene lugar entre objetos de distinta naturaleza, trayendo como resultado la presencia de cuerpos con cargas negativas y cuerpos con cargas negativas.

La existencia de objetos cargados pasara desapercibida si se redujera a la simple chispa que tiene lugar al producirse la descarga. Sin embargo, cuando esta chispa tiene lugar en ambientes donde existan vapores inflamables, los efectos pueden ser devastadores. De hecho, el desbalance de cargas es responsable, cada año, por cientos de incendios y explosiones en la industria. Aún más, las estadísticas indican que, debido a las mayores velocidades en los procesos y a la creación de combustibles de gran pureza, el problema se incrementa. Algunos procesos capaces de producir incendios en las industrias son los siguientes:

- El flujo de petróleo o mezclas de petróleo y agua en tubos y filtros finos.
- La eyección de partículas o pequeñas gotas desde una tobera. Por ejemplo, cuando se hace lavado a presión con agua o la etapa inicial de llenado de un tanque de gasolina o de aceite.

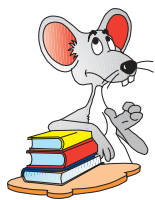
- c) El frotamiento energético de materiales poliméricos y la posterior separación de los mismos.

Además de la amenaza de ignición, el desbalance de cargas también causa muchos problemas en los procesos industriales, los cuales dan lugar a la suspensión de la producción.

Es importante mencionar que hay siempre un peligro latente en las estaciones de servicio de gasolina, donde los usuarios deben observar reglas básicas elementales para evitar desgracias. Se han dado casos de fuegos que se inician cuando el conductor, al bajar del vehículo, adquiere una carga en exceso con sólo frotar su cuerpo con partes interiores del mismo y,

luego, toca el pico de la manguera del surtidor, alrededor del cual se encuentran gases volátiles, provenientes de la gasolina. El simple hecho de quitarse la chaqueta dentro del automóvil y, luego, bajarse, puede ser el inicio de un hecho lamentable si se combina con la adquisición de una carga eléctrica y con los vapores de la gasolina.

La prevención de los dañinos efectos del desbalance de cargas es de fundamental importancia para la seguridad industrial. El método más común es el *aterramiento*, que consiste en conectar a tierra, mediante un elemento conductor, al objeto susceptible de cargarse. De esta manera, los electrones se transfieren a tierra y el objeto queda descargado, eliminando, así, algún peligro potencial.



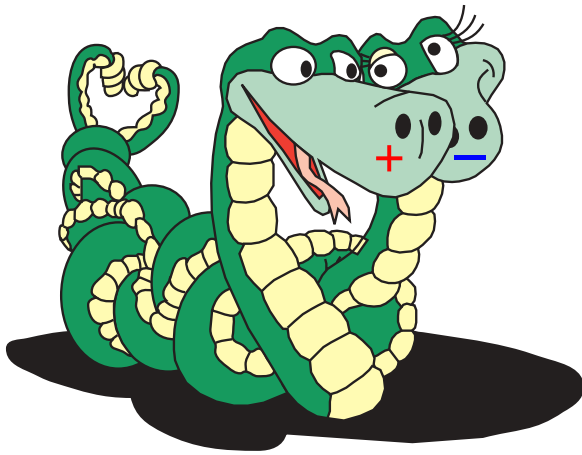
PIENSA Y EXPLICA



- 1.1** Describe la estructura atómica de la materia.
- 1.2** ¿Qué carga tienen las partículas atómicas?
- 1.3** ¿Cómo se comparan las masas de las partículas atómicas?
- 1.4** ¿De dónde deriva la palabra “electrón”?
- 1.5** ¿Cuándo se dice que un objeto está electrizado?
- 1.6** ¿Por qué al frotar una varilla de vidrio con un trapo, la varilla se carga positivamente?
- 1.7** ¿Por qué al frotar una varilla de plástico con un pedazo de cuero, aquella se carga negativamente?
- 1.8** Explica cómo cargarías una esferita de anime: **a)** Con carga positiva. **b)** Con carga negativa.
- 1.9** ¿Cuándo se dice que un cuerpo tiene exceso de carga negativa?
- 1.10** ¿Cuándo se dice que un cuerpo tiene exceso de carga positiva?
- 1.11** ¿Por qué se dice que la carga está cuantizada?
- 1.12** ¿Cuál es la carga de un electrón? ¿De un protón?

- 1.13** ¿Qué dice el principio de conservación de la carga?
- 1.14** ¿Qué caracteriza a un conductor? ¿A un aislante?
- 1.15** Da ejemplos de materiales conductores y aislantes.
- 1.16** ¿Cuándo se dice que un cuerpo es eléctricamente neutro?
- 1.17** ¿Cómo puede cargarse un cuerpo por inducción?
- 1.18** Explica la causa de atracción, sobre pedacitos de papel, de una varilla de vidrio cargada positivamente.
- 1.19** ¿Por qué una varilla de aluminio es mejor conductora que una varilla de madera?
- 1.20** Al frotar un globo de plástico con un pedazo de lana y soltarlo, éste se pega a una pared y, luego, cae. ¿Cuál es la causa?
- 1.21** Si una esfera metálica es atraída por una varilla cargada positivamente, ¿significa esto que la esfera tiene un exceso de carga?
- 1.22** Una esfera conductora, atada a un hilo aislante, es atraída por una varilla con carga positiva. ¿Es necesario que la esfera esté cargada negativamente para que esto suceda? Explica.
- 1.23** Si a un electroscope se le acerca un cuerpo con carga, **a)** negativa, **b)** positiva, ¿qué le sucede a las laminillas?
- 1.24** A un electroscope cargado negativamente se le acerca un cuerpo cargado. Si las laminillas, **a)** se abren, **b)** se acercan, ¿cuál es el signo del cuerpo cargado?
- 1.25** Es común el término *electrostática*, equivalente a *electricidad estática*, para referirse a los fenómenos envueltos en el intercambio de cargas y en las fuerzas de atracción y repulsión que se producen entre las mismas. Según lo estudiado, ¿estás de acuerdo con el uso de ese término para explicar lo estudiado en este capítulo? ¿Es *electrostática* sinónimo de *electricidad en reposo*?
- 1.26** Investiga el término *serie triboeléctrica*, referente a la presencia de cargas desbalanceadas.
- 1.27** Los llamados *eliminadores de estática* son unidades ionizadoras que producen iones positivos y negativos. Investiga sobre los mismos.
- 1.28** Las chispas debidas a la acumulación de cargas son más comunes en climas secos que en húmedos. ¿Podrías explicar por qué?

- 1.29** Aunque alguien puede recibir una descarga debido a la "electricidad estática" fuera o dentro de una habitación con sistemas de calefacción o acondicionares de aire; es más probable que esto suceda dentro de la habitación. ¿Por qué?
- 1.30** Algunos camiones para el transporte de gasolina llevan una cadena en la parte trasera que roza con el suelo. Esto previene la acumulación de cargas en el cuerpo del tanque. Explica cómo se realiza este proceso y de dónde viene la carga acumulada en el tanque del camión.
- 1.31** Cuando se extrae ropa de una secadora, ¿has observado cómo distintas piezas se adhieren entre sí? Explica.
- 1.32** ¿Por qué es importante prevenir las chispas originadas por el desbalance de cargas?



CAPÍTULO 2

LEY DE COULOMB

2.1 LEY DE COULOMB

Charles Coulomb (1736-1806) fue un coronel de las fuerzas armadas francesas que, en 1784, realizó una serie de experimentos mediante una balanza de torsión, inventada por él mismo, para determinar cuantitativamente la fuerza mutua entre dos cuerpos cargados. Básicamente, esta balanza consistía en una barra no conductora que sostenía en uno de sus extremos una bolita cargada positivamente y, en el otro, una bolita neutra que le servía de contrapeso. La barra, como se indica en la fig. 2.1, podía girar, teniendo como eje un hilo aislante. Cuando se acerca otra bolita, también con carga positiva, la fuerza de repulsión hace que la barra gire. El ángulo de giro está relacionado tanto con las cargas de las bolitas, como con la distancia entre las mismas.

Los experimentos realizados por Coulomb demostraron que la fuerza generada tenía las siguientes propiedades:

- La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación, r , entre las cargas.
- La fuerza es proporcional al producto de las cargas q_1 y q_2 de las bolitas.
- La fuerza es de atracción si las cargas tienen signos distintos y de repulsión si las cargas tienen signos iguales

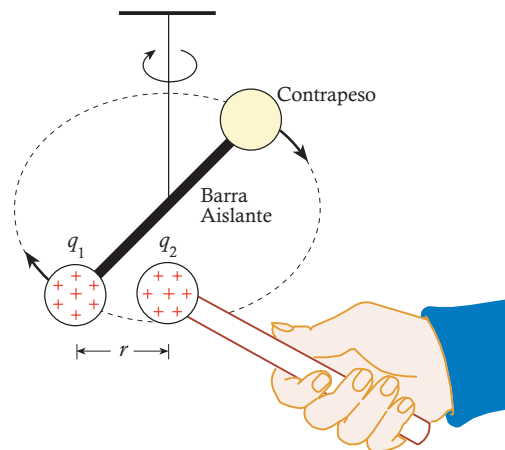


Fig. 2.1 Esquema del experimento realizado para establecer la Ley de Coulomb.

Los resultados anteriores se resumen en la ley de Coulomb, que establece lo siguiente:

La fuerza eléctrica mutua que surge entre dos cargas, muy pequeñas, separadas por una distancia relativamente grande, en relación con sus tamaños (cargas puntuales), está dirigida a lo largo de la línea que une a las dos cargas. Es de atracción si las cargas tienen signos distintos y de repulsión si tienen signos iguales. La fuerza es directamente proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La magnitud de la fuerza, dada por la ley de Coulomb, puede escribirse como:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Donde:

q_1, q_2 : cargas positivas o negativas que interactúan.

r : distancia que separa las cargas.

k : constante de Coulomb en el vacío.

En el Sistema Internacional de Medidas (SI) la carga q se mide en *coulombs*, la distancia r en metros (m) y la fuerza F en newtons (N). Para estas unidades, el valor de la constante k , en el vacío, está dada, aproximadamente, por:

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (2.2)$$

La ley de Coulomb dada por (2.1) es válida en el vacío y para partículas cargadas muy pequeñas. La constante de proporcionalidad, k , que es independiente de las cargas y de la distancia, se define como función de otra constante ϵ_0 , conocida como *permitividad eléctrica en el vacío*, de la siguiente manera:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Entonces, la relación (2.1) puede escribirse como:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.4)$$

El valor experimental obtenido para la permitividad en el vacío es:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C/Nm}^2 \quad (2.5)$$

El cual puede aproximarse por:

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ C/Nm}^2 \quad (2.6)$$

La unidad fundamental de carga, *el coulomb*, es, en realidad, una cantidad tan grande, que la fuerza de repulsión que generarían dos cargas positivas de 1 C, separadas una distancia de 1 m, sería extraordinaria. En efecto, para estos valores se tendría:

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1 \text{ C})(1 \text{ C})}{(1 \text{ m})^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Si se considera un automóvil de masa promedio 1.500 kg, el peso correspondiente es:

$$p = m \cdot g = 1.500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 15.000 \text{ N}$$

La fuerza de repulsión de las cargas de 1 C equivaldría, entonces, al peso de:

$$\frac{9 \cdot 10^9}{15 \cdot 10^3} = 600.000 \text{ automóviles}$$

Lo anterior explica el uso frecuente de submúltiplos de la unidad fundamental, usualmente el microcoulomb (μC), el nanocoulomb (nC) y el picocoulomb (pC):

$$1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C} \quad 1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C} \quad 1 \text{ pC} = 10^{-12} \text{ C}$$

Es importante enfatizar que cuando todas las unidades envueltas en la expresión matemática de la ley de Coulomb se expresan en newtons (N), Coulombs (C) y metros (m) y la constante k viene dada en $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, el resultado de cualquier operación para determinar la fuerza, las cargas o la distancia, se expresará en esas unidades (N, C, M), respectivamente. De allí que si se mantiene un esquema de unidades, compatible con lo mencionado, no hay necesidad de escribir esas unidades cada vez que se resuelve un problema.

Ejemplo 2.1

Dos cargas puntuales positivas de valores $q_1 = 10 \text{ mC}$ y $q_2 = 5 \text{ mC}$, están situadas en los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(4,4)$ como se indica en la fig. 2.2. Las medidas están en cm. a) ¿Es la fuerza de repulsión o de atracción? b) Determina la magnitud y dirección de la fuerza de q_1 sobre q_2 . c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza de q_2 sobre q_1 ?

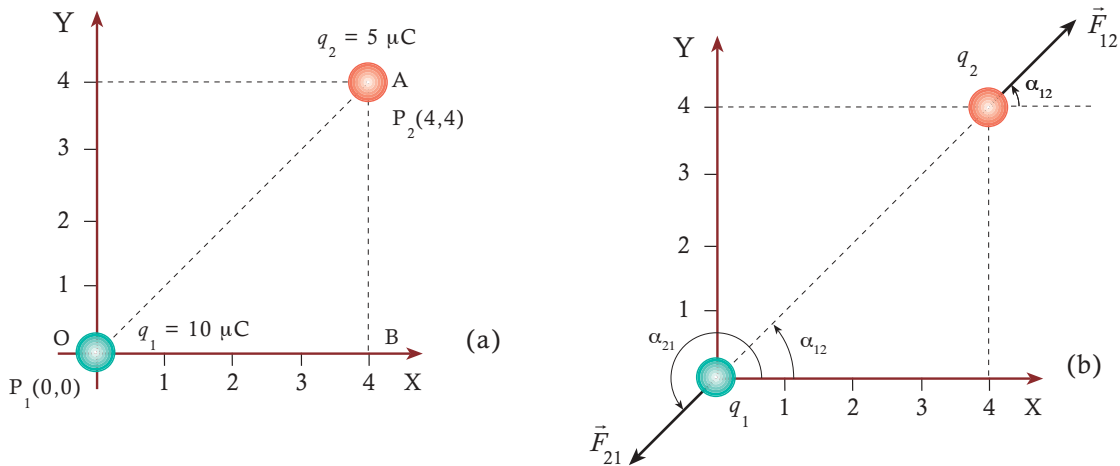


Fig. 2.2 a) Disposición de las cargas para el ejemplo 2.1. b) Dirección de las fuerzas sobre q_1 y q_2 .

Solución

a) En la fig. 2.2a se muestra la disposición de las cargas. Como las cargas son positivas, la fuerza entre las mismas es de repulsión.

b) Primero, expresamos q_1 y q_2 en coulombs:

$$q_1 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad q_2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es:

$$r = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

La fuerza es una cantidad vectorial y tiene, por lo tanto, módulo y dirección. Si llamamos $\vec{F}_{12}$ a la fuerza de repulsión que ejerce q_1 sobre q_2 , su módulo viene dado por la relación (2.1):

$$F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{32} \cdot 10^{-2})^2} = \frac{45 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-4}} = 140,63 \text{ N}$$

De la fig. 2.2 se observa que el ángulo α_{12} que forma la fuerza $\vec{F}_{12}$ con el eje X es de 45° , ya que el triángulo OAB es isósceles y rectángulo, por lo que los dos lados OB y AB tienen igual longitud.

c) Por el principio de acción y reacción, la fuerza $\vec{F}_{12}$ que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_1 , es igual en módulo, pero opuesta en dirección. Entonces:

$$F_{21} = 140,63 \text{ N}$$

De la fig. 2.2b observamos que el ángulo α_{21} está dado por:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + 180^\circ = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$$

Ejemplo 2.2

Se tienen tres cargas puntuales sobre el eje X. La carga $q_1 = -2 \mu\text{C}$ está en $P_1(-3, 0)$, $q_2 = 4 \mu\text{C}$ está en $P_2(0, 0)$ y $q_3 = 2 \mu\text{C}$ está en $P_3(3, 0)$. Determina la fuerza resultante sobre q_2 . Las distancias están en metros.

Solución

En la fig. 2.3 se indica la distribución de las cargas.

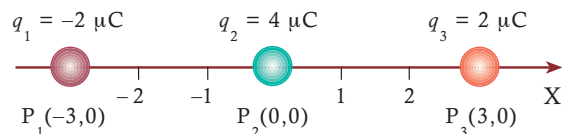


Fig. 2.3 Disposición de las cargas para el ejemplo 2.2.

La fuerza ejercida por q_1 , sobre q_2 es una fuerza de atracción, por ser cargas de signos opuestos. Está, por tanto, dirigida en dirección contraria al eje de las X. La distancia entre q_1 y q_2 es de 3 m y el módulo de la fuerza es:

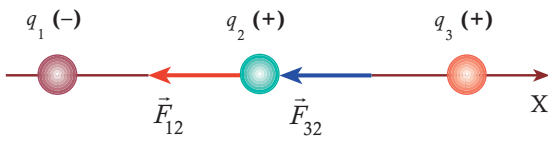


Fig. 2.4 Disposición de las cargas para el ejemplo 2.2.

$$F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{9} = 0,008 \text{ N}$$

La fuerza ejercida por q_3 sobre q_2 es de repulsión, por tratarse de cargas de igual signo. La distancia entre las cargas es, también, de 3 m y su módulo es:

$$F_{32} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{9} = 0,008 \text{ N}$$

Como puede observarse de la fig. 2.4, las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{32}$ sobre la carga q_2 , tienen la misma dirección y la fuerza resultante será:

$$F_R = F_{12} + F_{32} = 0,016 \text{ N}$$

Vectorialmente se tendrá:

$$\vec{F}_R = -0,016\vec{i} \text{ N}$$

2.2 FORMAVECTORIAL DE LA LEY DE COULOMB

Como sabemos, la fuerza es un vector y la ley de Coulomb, la cual expresa la fuerza entre cargas, tiene, como consecuencia, una forma vectorial dada por:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (2.7)$$

donde $\vec{r}_{12}$ es un vector unitario, dirigido desde q_1 hacia la carga q_2 sobre la cual se ejerce la fuerza de interacción, como se muestra en la fig. 2.5. Como q_1 es la carga que ejerce la fuerza de interacción sobre la carga q_2 , el vector $\vec{r}_{12}$ se generará en la carga q_1 y apuntará de q_1 a q_2 . Si las cargas tienen carga de signos diferentes, la fuerza de interacción será de atracción y tendrá dirección contraria a $\vec{r}_{12}$; si las cargas tienen igual signo, la fuerza será de repulsión y apuntará en la misma dirección de $\vec{r}_{12}$.

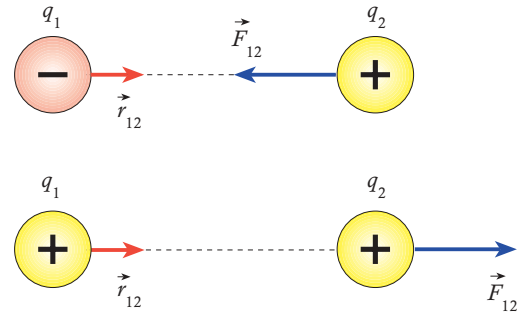


Fig. 2.5 $\vec{F}_{12}$ es la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 . El vector unitario $\vec{r}_{12}$ se origina en la carga q_1 y apunta de q_1 a q_2 . La fuerza es de atracción si las cargas tienen signos contrarios y es de repulsión si son del mismo signo.

Ejemplo 2.3

En los vértices del triángulo mostrado en la fig. 2.6 se colocan las cargas de valores $q_1 = 2 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ y $q_3 = 4 \mu\text{C}$. Determina la fuerza eléctrica resultante sobre la carga q_3 .

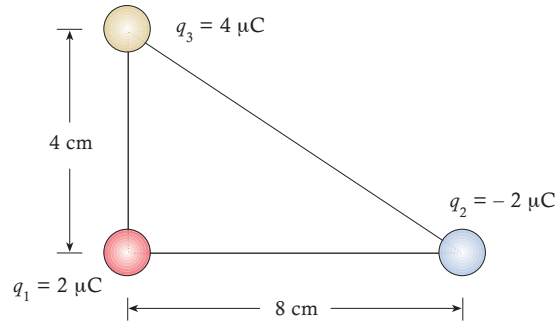


Fig. 2.6 Ejemplo 2.3.

Solución

Utilizaremos la relación (2.7) para determinar la fuerza resultante. Refiriéndonos a la fig. 2.6, determinaremos los vectores unitarios $\vec{r}_{13}$ y $\vec{r}_{23}$:

$$\vec{r}_{23} = \frac{0\vec{i} + 4\vec{j}}{4} = \vec{j}$$

$$\vec{r}_{13} = \frac{(0-8)\vec{i} + (4-0)\vec{j}}{\sqrt{64+16}} = \frac{-8\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{80}} = -0,89\vec{i} + 0,45\vec{j}$$

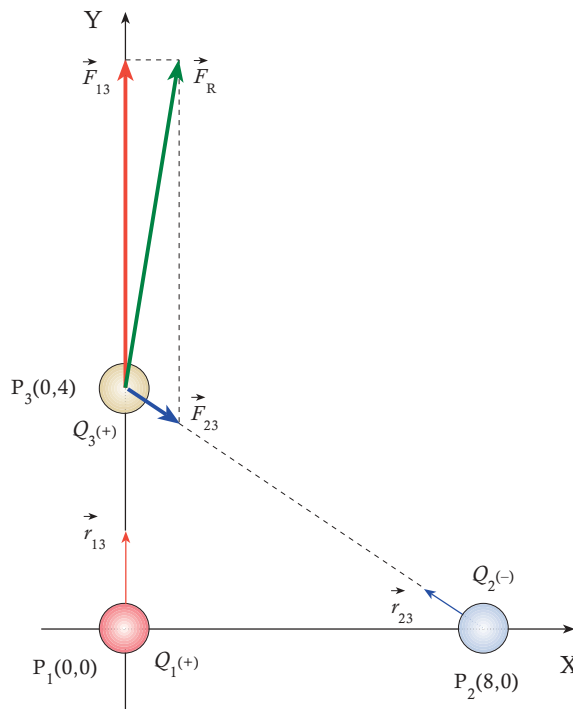


Fig. 2.1 Ejemplo 2.3. Determinación de la fuerza resultante.

Las distancias R_{13} y R_{23} están dadas por:

$$R_{13} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow R_{13}^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_{23} = \sqrt{(8 \cdot 10^{-2})^2 + (4 \cdot 10^{-2})^2} = \sqrt{80 \cdot 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow R_{23}^2 = 80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La fuerza $\vec{F}_{13}$ está dada por:

$$\vec{F}_{13} = K \frac{Q_1 \cdot Q_3}{R_{13}^2} \vec{r}_{13}$$

Substituyendo valores:

$$\vec{F}_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{C}) \cdot (4 \cdot 10^{-6} \text{C})}{16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 4}{16} \frac{10^9 \cdot 10^{-12}}{10^{-4}} \vec{j} \text{ N} = 45 \vec{j} \text{ N}$$

Para la fuerza $\vec{F}_{23}$, se tiene:

$$\vec{F}_{23} = K \frac{Q_2 \cdot Q_3}{R_{23}^2} \vec{r}_{23}$$

Introduciendo los valores en la fórmula anterior:

$$\vec{F}_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{(-2 \cdot 10^{-6}) \cdot (4 \cdot 10^{-6})}{80 \cdot 10^{-4}} (-0.89 \vec{i} + 0.45 \vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{23} = -9(-0.89 \vec{i} + 0.45 \vec{j}) = 8.01 \vec{i} - 4.05 \vec{j} \text{ N}$$

$\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ pueden expresarse en términos del módulo y ángulo como:

$$F_{13} = \sqrt{0^2 + 45^2} = \sqrt{45^2} = 45$$

$$\theta_{13} = \tan^{-1} \frac{45}{0} = \tan^{-1}(\infty) = 90^\circ$$

$$F_{23} = \sqrt{8.01^2 + 4.05^2} = \sqrt{64.16 + 16.40} = 8.98$$

$$\theta_{23} = \tan^{-1} \frac{-4.05}{8.01} = \tan^{-1}(-0.51) = -26.82^\circ$$

En la fig. 2.7 se dibujan ambas fuerzas. La fuerza resultante sobre la carga Q_3 es, entonces:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 45 \vec{j} + 8.01 \vec{i} - 4.05 \vec{j} = 8.01 \vec{i} + 40.95 \vec{j} \text{ N}$$

El módulo y ángulo de la fuerza resultante son:

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{8.01^2 + 40.95^2} = \sqrt{64.16 + 1.676,30} = \\ &= \sqrt{1.741,06} = 41,73 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \left(\frac{40,95}{8,01} \right) = \tan^{-1}(5,11) = 79,93^\circ$$

La fig. 2.7 muestra al vector que representa la fuerza resultante.

Ejemplo 2.4

Dos esferas, de 20 g de masa, con la misma carga, cuelgan de hilos sin peso, como se muestra en la fig. 2.8. Cada cuerda tiene una longitud de 20 cm y la fuerza de repulsión hace que se forme un ángulo de 12° entre ellas. Determina la carga de cada esfera.

Solución

Según la fig. 2.8a, la distancia d está dada por:

$$d = L \sin 6^\circ = (0,20 \text{ m}) \cdot \sin 6^\circ = 0,021 \text{ m}$$

La distancia entre las cargas es:

$$r = 2d = 0,042 \text{ m}$$

Las esferas se separan debido a las fuerzas de repulsión entre las mismas. Esto indica que las cargas de las esferas son del mismo signo. Entonces, sobre cada una de ellas actúan las siguientes fuerzas: la tensión T , el peso P y la fuerza eléctrica de repulsión F_e . En la fig. 2.8b se muestran estas fuerzas. Este conjunto de fuerzas equilibran a las esferas, tanto en la dirección vertical como en la horizontal. Es decir, la sumatoria de fuerzas en ambas direcciones debe ser igual a cero:

$$\sum F_x = T \sin 6^\circ - F_e = 0 \Rightarrow T \sin 6^\circ = F_e$$

$$\sum F_y = T \cos 6^\circ - mg = 0 \Rightarrow T \cos 6^\circ = mg$$

Dividiendo las relaciones anteriores, obtenemos:

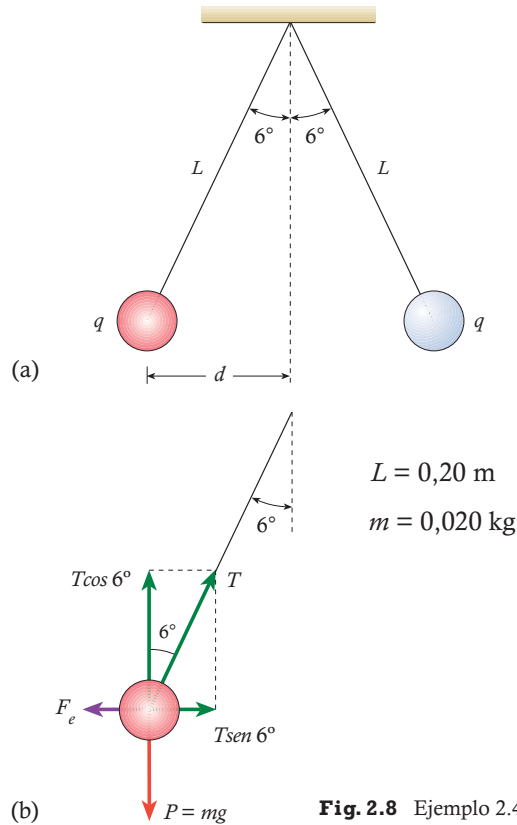
$$F_e = mg \tan 6^\circ = 0,02 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tan 6^\circ = 0,021 \text{ N}$$

De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica entre las esferas puede expresarse como:

$$F_e = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F_e r^2}{k}}$$

Sustituyendo valores:

$$q = \sqrt{\frac{0,021 \text{ N} \cdot 0,042^2 \text{ m}^2}{9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2}} = 6,4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

**Ejemplo 2.5**

En la configuración de cargas mostrada en la fig. 2.9, $q_1 = +12 \mu\text{C}$, $q_2 = -8 \mu\text{C}$. a) ¿A qué distancia de q_2 se debe colocar otra carga q_3 para que la fuerza resultante sobre la misma sea nula? b) Si la carga q_3 se colocara entre q_1 y q_2 , ¿habrá algún punto donde la fuerza resultante sobre q_3 sea nula?

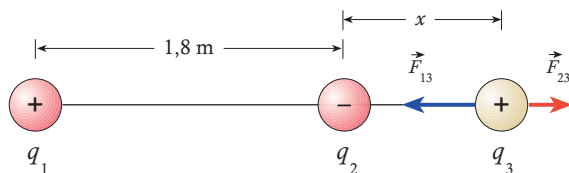


Fig. 2.9 Ejemplo 2.5.

Solución

a) Si q_3 se coloca al lado derecho de q_2 , las fuerzas de q_1 y de q_2 sobre q_3 , $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$, son de sentidos contrarios, tal como se muestra en la fig. 2.9. Bajo

estas condiciones, existirá un punto donde estas fuerzas se anulen. De acuerdo con la ley de Coulomb, $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ pueden escribirse como:

$$\vec{F}_{13} = k \frac{q_1 q_3}{(1,8 + x)^2} \vec{i} \quad \vec{F}_{23} = k \frac{q_2 q_3}{x^2} (-\vec{i})$$

La nulidad de la suma vectorial de estas fuerzas se expresa de la manera siguiente:

$$\vec{F}_{13} = \vec{F}_{23} \Rightarrow k \frac{q_1 q_3}{(1,8 + x)^2} \vec{i} + k \frac{q_2 q_3}{x^2} (-\vec{i}) = 0$$

Simplificando la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{q_1}{(1,8 + x)^2} = \frac{q_2}{x^2}$$

Dando valores a q_1 y q_2 llegamos a la ecuación:

$$x^2 - 7,2x - 6,48 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x_1 = 8,01 \text{ m} \quad x_2 = -0,81 \text{ m}$$

Sólo el valor de x_1 corresponde a la solución. El valor de x_2 es despreciado (¿Por qué?).

b) Si la carga q_3 se colocara entre las cargas q_1 y q_2 , la fuerza resultante no podría ser nula, porque las fuerzas $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ tendrían la misma dirección.

2.3 INFLUENCIA DEL MEDIO SOBRE LA FUERZA ENTRE CARGAS

La ley de Coulomb, expresada por la fórmula (2.1), considera que las partículas cargadas están situadas en el vacío y la constante k es, para esta condición, igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Cuando las cargas están situadas en un medio distinto al vacío, la fuerza entre las mismas sufre una reducción que depende del nuevo medio. A este factor de reducción se le conoce como *constante dieléctrica del medio* y se denota por la letra K . De acuerdo a esto, la magnitud de la fuerza dada por la ley de Coulomb adopta la siguiente forma:

$$F = \frac{k}{K} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (2.8)$$

La tabla 2.1 presenta los valores de la constante dieléctrica, K , para algunos materiales.

Medio	Constante Dieléctrica (K)
Vacío	1,0000
Aire	1,0006
Agua	81
Papel	3,5
Vidrio	4 - 6
Mica	5,7
Aceite	4,7
Ámbar	2,7

Tabla 2.1 Constante dieléctrica de algunos materiales.

De la tabla 2.1, es evidente que la constante K puede tomarse igual a 1, tanto para el vacío como para el aire. Para cualquier otro material de la tabla, K es mayor que 1 y la fuerza entre cargas disminuye significativamente. La constante dieléctrica puede expresarse como:

$$K = \frac{\text{Fuerza en el vacío}}{\text{Fuerza en el medio}} \quad (2.9)$$

La ecuación anterior establece que la fuerza entre dos cargas, en un medio distinto al vacío, puede determinarse dividiendo la fuerza en el vacío entre la constante dieléctrica K .

Es importante mencionar que la reducción de la fuerza eléctrica en algunos materiales está relacionada con la naturaleza polar de sus moléculas. Así, por ejemplo, la molécula del agua presenta una distribución asimétrica, en la cual la carga negativa se separa de la positiva para formar lo que se conoce como un *dipolo eléctrico*. En la fig. 2.10 se presenta esta distribución. Aunque la molécula de agua sigue siendo eléctricamente neutra, la carga de los átomos de hidrógeno se separa de la del átomo de oxígeno, dentro de la red cristalina. Cada una de las moléculas se puede representar, entonces, como un dipolo.

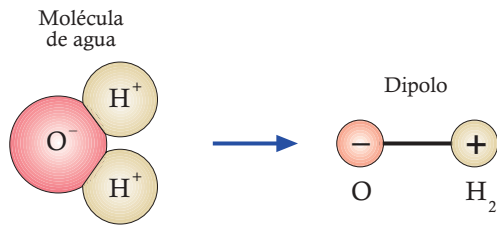


Fig. 2.10 Característica bipolar de la molécula de agua.

2.4 FUERZA ELÉCTRICA Y FUERZA GRAVITACIONAL

Las expresiones para la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional entre dos partículas de masas m_1 y m_2 y cargadas con cargas q_1 y q_2 son, respectivamente:

$$F_e = \frac{k}{K} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Como puede observarse de estas relaciones, tanto la fuerza eléctrica, F_e , como la fuerza gravitatoria, F_g , varían inversamente con el cuadrado de la distancia, r , entre las partículas. Ambas fuerzas son proporcionales a productos: la fuerza eléctrica es proporcional al producto de las cargas, mientras que la fuerza gravitacional es proporcional al producto de las masas.

Por otro lado, las cargas eléctricas pueden ser de signo positivo o de signo negativo; como consecuencia, se pueden generar entre las mismas fuerzas de atracción o de repulsión, tal como hemos señalado anteriormente. En cambio, las masas siempre son positivas, y la fuerza gravitacional es siempre de atracción. Hay que agregar, además, que las fuerzas eléctricas entre cargas depende del medio donde se produce la interacción (constante K en las relaciones anteriores), mientras que la fuerza gravitacional no es afectada por el medio. Por último, podemos mencionar que la fuerza eléctrica entre partículas cargadas es muchísimo mayor que la fuerza gravitacional entre ellas. Así, por ejemplo, en un átomo de hidrógeno la relación entre las fuerzas eléctrica y gravitacional entre el electrón y el protón es aproximadamente igual a $3 \cdot 10^{39}$. Este resultado indica que la fuerza gravitacional es despreciable cuando se compara con la fuerza eléctrica.

2.5 RELÁMPAGOS Y TRUENOS

¡Cuántas veces hemos experimentado la impactante imagen de un relámpago, seguida del estampido de un trueno! Un evento tan común elude, en cierta manera, una explicación completamente satisfactoria del fenómeno. Sin embargo, se han asomado ciertas hipótesis que arrojan luces sobre cómo se producen estos formidables hechos naturales.

Los relámpagos son producto de la generación y acumulación de cargas en las nubes y la superficie terrestre. Una hipótesis sostiene que los movimientos aleatorios de las masas de aire y agua dentro de las nubes de tormenta, ocasionan la ruptura de la molécula polar del agua, creándose, así, iones positivos y negativos en el interior de esas formidables masas convulsionadas. Otra hipótesis argumenta que la creación de cargas tiene lugar cuando las gotitas de agua se congelan. En este caso, los iones con carga positiva en las zonas externas, más frías, de las gotitas, mientras que los iones negativos se distribuyen en las zonas internas, más calientes. Cuando la parte interna de las gotas se congela, se expande, rompiendo la capa externa. Los iones con carga positiva ascienden hacia la parte superior de las nubes, dejando los iones negativos en su parte inferior. Como consecuencia de esta separación de cargas, la distribución eléctrica en una nube luce como se indica en la fig. 2.11.

Cuando las cargas positivas y negativas se separan y se acumulan significativamente, surgen grandes fuerzas de atracción entre las mismas que, cuando se dan las condiciones de conductividad dentro de la nube, se manifiestan en forma de relámpagos y truenos. En realidad, la mayoría de los relámpagos surgen en el interior de las nubes y pocas veces son percibidos desde el exterior.

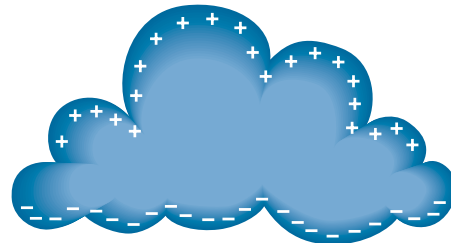


Fig. 2.11 Distribución de cargas en una nube de tormenta.

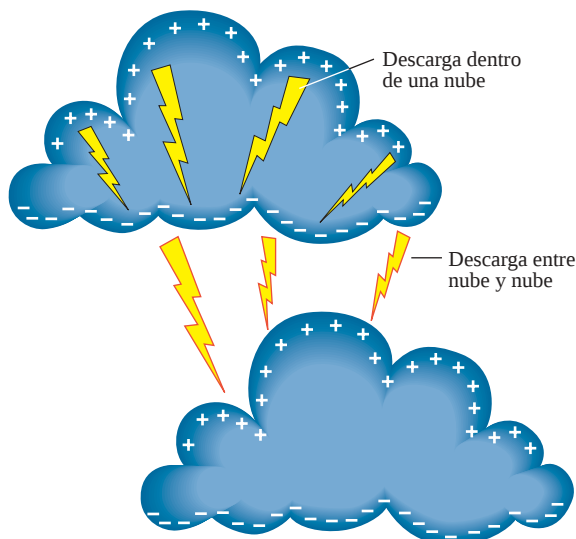


Fig. 2.12 Los relámpagos en una tormenta pueden tener lugar en el interior de una nube o entre dos nubes distintas.

Como se ilustra en la fig. 2.12, las descargas en una tormenta, pueden darse bien sea en el interior de una nube o entre nubes diferentes.

En los casos más peligrosos, por los riesgos que significan para los seres que habitan la Tierra, se producen relámpagos entre las nubes y objetos situados sobre la superficie terrestre. En particular, los edificios altos y los árboles son particularmente susceptibles de ser afectados. En la fig. 2.13 se ilustra lo que sucede: la parte inferior de la nube, con carga negativa, induce cargas positivas en la parte superior de la capa superior de la Tierra. Como el aire es un buen aislador, impide, en principio la descarga eléctrica; sin embargo, a medida que la cantidad de carga acumulada se hace mayor, la fuerza de atracción entre las cargas positivas y negativas rompe la barrera aislante, el aire se hace conductor y se produce la descarga, cuando se alcanza una diferencias de potenciales cuyos valores pueden estar alrededor de 1 millón de voltios. Esta tremenda cantidad de energía provoca, en tiempos tan cortos como 30 milisegundos, efectos luminosos (el relámpago) y efectos sonoros (el trueno).

El relámpago corresponde, en una escala mucho mayor, a la chispa que se genera cuando, cargados de carga negativa, tocamos con nuestros dedos un objeto metálico.

El trueno se origina por las altas temperaturas producidas por la descarga eléctrica. En el orden de 30.000°C (¡Superior a la temperatura de la superficie del Sol!), tales temperaturas calientan el aire en fracciones de segundos. Como resultado, la presión aumenta entre 10 y 100 atmósferas, el aire se expande violentamente y luego se contrae, produciéndose una explosión que da lugar a ondas de choque, similares a las producidas por un avión cuando rompe la barrera del sonido. Es esta onda de choque la que oímos cuando se produce la descarga.

Para evitar los efectos destructivos de las descargas eléctricas se utilizan los *pararrayos*, cuya forma básica, descrita por su inventor, Benjamín Franklin, consiste en una varilla metálica de unos 2 metros de largo que se coloca en la parte alta de los edificios y unida eléctricamente a tierra por medio de un cable conductor. De esta forma, la corriente que se genera al producirse la descarga, es llevada hasta la superficie terrestre sin que cause daño a la estructura del edificio o a las personas que lo habitan.

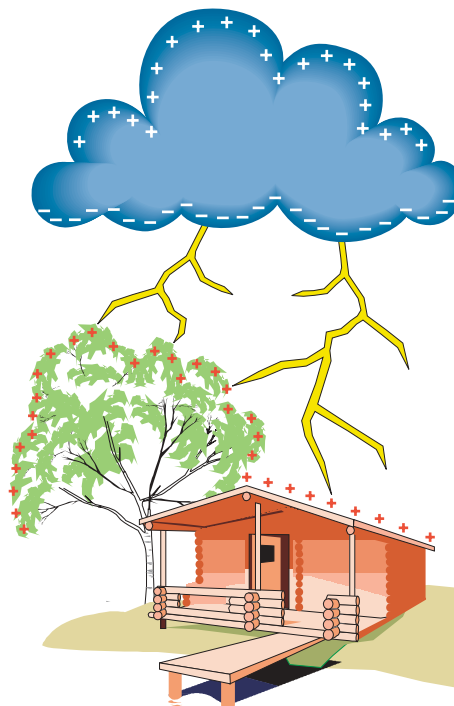
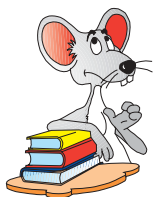


Fig. 2.13 Las nubes cargadas inducen cargas positivas en la superficie terrestre. Con las condiciones apropiadas, se produce la descarga, que está acompañada de relámpagos y truenos.



PIENSA Y EXPLICA



- 2.1** Enuncia la ley de Coulomb.
- 2.2** ¿Es válida la ley de Coulomb cuando $r = 0$. Explica.
- 2.3** ¿Cuáles son los valores de las constantes ϵ_0 y k , que figuran en la ley de Coulomb?
- 2.4** ¿Qué es una carga puntual?
- 2.5** ¿Cuál es la equivalencia de $1 \mu\text{C}$, 1 nC , 1 pC con el Coulomb?
- 2.6** ¿Cómo influye el medio en la fuerza mutua entre dos cargas?
- 2.7** ¿Qué es la constante dieléctrica de un material? ¿Cuál es su expresión matemática?
- 2.8** ¿Qué es un dipolo eléctrico? Explica cómo es la distribución de carga en la molécula de agua?
- 2.9** ¿Cómo se comparan las fuerzas eléctrica y gravitacional entre dos partículas muy pequeñas con cargas de igual signo?
- 2.10** Explica cómo se producen la separación de cargas en las nubes de una tormenta.
- 2.11** Explica cómo se producen los relámpagos entre dos nubes cargadas y entre una nube cargada y la superficie terrestre.
- 2.12** Explica cómo se produce el ruido correspondiente al trueno.
- 2.13** ¿Qué es un pararrayos? ¿Cómo funciona en su forma básica?
- 2.14** De las curvas de la fig. 2.14, ¿cuál de ellas mejor representa la dependencia de la fuerza F con la distancia r , según la ley de Coulomb?
- 2.15** ¿Cuál de las siguientes opciones podemos usar para disminuir la magnitud de la fuerza entre dos cargas puntuales?: a) Sumergir ambas cargas en un material de constante dieléctrica igual a 2? b) Aumentar la distancia al doble. c) Incrementar una de las cargas en 2 unidades.

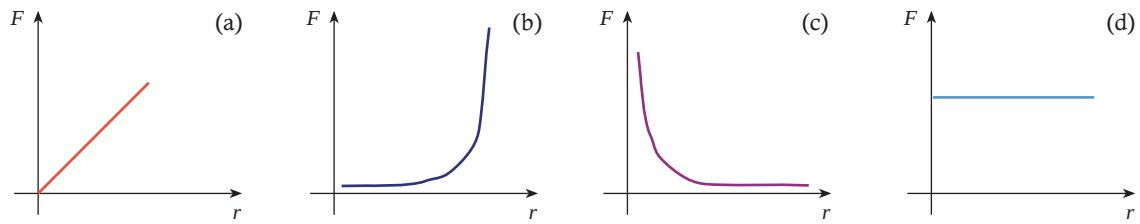
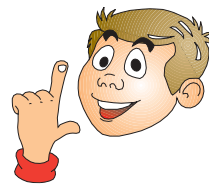


Fig. 2.14 ¿Cuál de las figuras representa mejor a la ley de Coulomb? Piensa y explica 2.14.



PROBLEMAS



- 2.1** a) Si una esfera metálica tiene una carga de $+1,2 \text{ nC}$, ¿cuántos electrones ha perdido? b) Si la misma esfera tiene una carga de $-2 \text{ } \mu\text{C}$, ¿cuántos electrones ha ganado?
- 2.2** ¿Cuál es la fuerza eléctrica entre los dos protones de una molécula de hidrógeno (H_2) si su separación es, aproximadamente, igual a 10^{-10} m ?
- 2.3** Se tienen tres cargas puntuales, dispuestas como se muestra en la fig. 2.15. $q_1 = 12 \text{ nC}$, $q_2 = -20 \text{ nC}$ y $q_3 = 24 \text{ nC}$. Determina la magnitud y la dirección de las fuerzas resultantes sobre q_2 y q_3 .

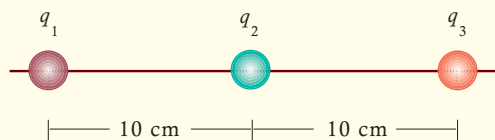


Fig. 2.15 Problema 2.3.

- 2.4** La fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas es de $10 \text{ } \mu\text{N}$, cuando están separadas 10 cm. Si una de las partículas tiene una carga de 1 nC , ¿cuál es la carga de la otra partícula?
- 2.5** Dos cargas positivas $q_1 = 1 \text{ nC}$ y $q_2 = 2 \text{ nC}$ están separadas 30 cm. ¿Dónde debemos colocar una tercera carga, $q_3 = 1 \text{ nC}$, de forma que la fuerza resultante sobre la misma sea nula.
- 2.6** Las cargas puntuales $q_1 = -5 \text{ } \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \text{ } \mu\text{C}$ y $q_3 = 4 \text{ } \mu\text{C}$ están colocadas en $y = 20 \text{ cm}$, $y = 0$ y $x = -20 \text{ cm}$ del origen, respectivamente. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre la carga q_2 ?

- 2.7** Tres cargas puntuales de $4\ \mu\text{C}$, $-5\ \mu\text{C}$ y $8\ \mu\text{C}$ se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lado $40\ \text{cm}$, tal como se muestra en la fig. 2.16. Determina la fuerza resultante, en magnitud y ángulo, sobre la carga de $-5\ \mu\text{C}$.
- 2.8** Dos esferitas conductoras idénticas A y B de diámetros D tienen cargas similares y están separadas una distancia r mucho mayor que D . La fuerza de repulsión entre las mismas es F . Una tercera esferita C, idéntica a las anteriores e inicialmente descargada, toca a la esferita A, luego a la esferita B y es retirada. ¿Qué fuerza, en término de F , ejerce A sobre B, bajo estas nuevas condiciones?
- 2.9** Dos esferitas idénticas, con cargas distintas se atraen con una fuerza de $20\ \text{N}$, cuando están separadas $2\ \text{cm}$. Si las esferitas se unen mediante un hilo conductor y, luego, se retira el hilo, la fuerza entre ellas es de $8\ \text{N}$. ¿Qué carga tenían inicialmente las esferitas?
- 2.10** Cuatro cargas puntuales de $10\ \mu\text{C}$ se colocan en los vértices de un cuadrado de lado $50\ \text{cm}$, como se muestra en la fig. 2.17. Determina la fuerza sobre la carga negativa.

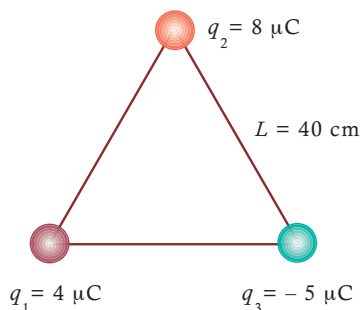


Fig. 2.16 Problema 2.7.

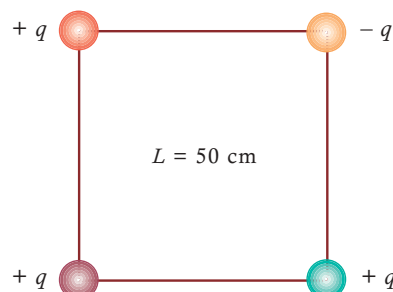


Fig. 2.17 Problema 2.10.

- 2.11** Tres cargas puntuales están colocadas sobre el eje Y. Las cargas $q_1 = -10\ \mu\text{C}$ y $q_2 = -8\ \mu\text{C}$ están colocadas en $y = 5\ \text{m}$ y $y = -4\ \text{m}$, respectivamente. ¿Dónde debe colocarse una tercera carga q_3 para que la fuerza resultante sobre la misma sea nula?
- 2.12** Determina el módulo y dirección de la fuerza total sobre la carga de $5\ \mu\text{C}$ de la fig. 2.18.

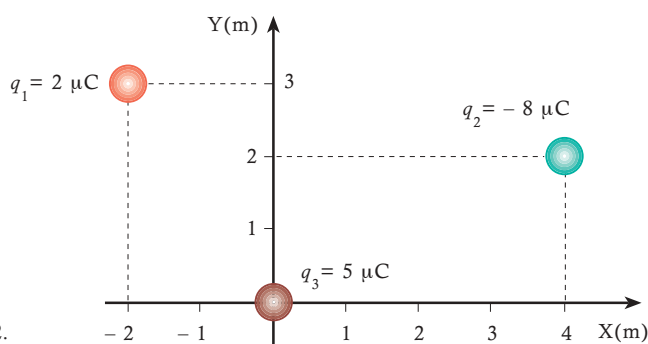


Fig. 2.18 Problema 2.12.



CAPÍTULO 3

EL CAMPO ELÉCTRICO

3.1 CAMPO ELÉCTRICO

A menudo se utiliza la expresión *campo gravitacional* para designar una región del espacio donde tienen lugar fuerzas de origen gravitacional, las cuales surgen debido a la interacción entre las masas presentes en dicha región espacial. Así, cuando se coloca una masa cercana a un cuerpo celeste, como la Tierra o el Sol, aquél experimenta una fuerza de atracción debido a la acción del campo gravitacional. Independientemente de la fuente que origina ese campo, lo que hay que destacar es el efecto ejercido sobre cualquier masa que caiga dentro de la influencia del mismo. En ese sentido, se puede establecer que cualquier fuerza ejercida sobre una masa dentro de una región del espacio, es consecuencia del campo gravitacional y no de la fuente que lo produjo.

Similarmente, el espacio alrededor de objetos cargados es capaz de generar fuerzas en otros cuerpos cargados y se habla, entonces, de un *campo eléctrico*, para referirse a la región espacial donde se producen fuerzas de origen eléctrico. En cierta manera, podemos decir que las propiedades del espacio alrededor de cargas es modificado, para producir interacciones con otros cuerpos cargados.

La *intensidad del campo eléctrico* se define como la fuerza que experimenta una *carga de prueba positiva*

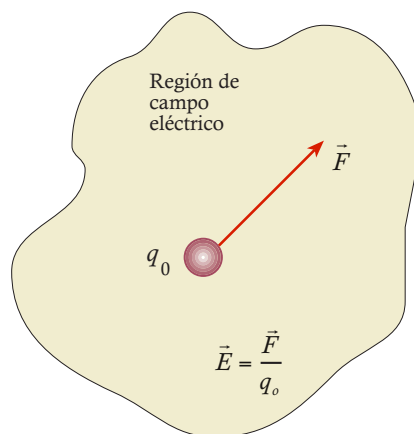


Fig. 3.1 La intensidad del campo eléctrico se define como la relación entre la fuerza resultante sobre una carga de prueba positiva, q_0 , y el valor de dicha carga.

al colocarse bajo la acción de tal campo, dividida entre el valor de dicha carga.

En la fig. 3.1 una carga de prueba positiva, q_0 , experimenta una fuerza $\vec{F}$ dentro de un campo eléctrico. De acuerdo a la definición anterior y designando a la intensidad del campo eléctrico mediante el vector $\vec{E}$, podemos escribir:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (3.1)$$

De la relación anterior, se observa que el campo eléctrico es un vector cuya dirección es la misma dirección de la fuerza. Al módulo del campo eléctrico se le conoce con el nombre de *intensidad del campo eléctrico*. Como F se expresa en newtons (N) y q_o en coulombs (C), la unidad SI de intensidad de campo eléctrico es el *newton/coulomb* (N/C). Hay que observar que si la carga que crea el campo es positiva, la carga de prueba q_o , también positiva, experimenta una fuerza que la hace alejarse de la primera. Por el contrario, si la carga que crea el campo es negativa, la fuerza que experimenta q_o , la hace acercarse a la misma.

El concepto de campo eléctrico modifica nuestra concepción en cuanto al origen de la fuerza que se ejerce sobre una carga situada en un punto del espacio. Si antes considerábamos que esa fuerza se originaba por la presencia de una carga, ahora afirmaremos que la misma es debida a la existencia de un campo eléctrico, cuya fuente es una distribución de cargas, la cual, a menudo, no nos interesa conocer, una vez establecido cómo varía el campo debido a esa distribución.

También hay que enfatizar que la presencia de una carga de prueba, q_o , sólo pone en evidencia la existencia de un campo eléctrico en una región. Su uso sólo nos permite verificar si hay o no un campo eléctrico y, de ninguna manera, este último depende de la carga de prueba. Una vez determinada la relación que expresa el campo eléctrico para una determinada distribución, no interviene carga de prueba alguna en el cálculo del campo. Es decir, el campo es independiente de la carga de prueba.

3.2 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

Considera una carga eléctrica positiva q , situada en el aire, que crea un campo eléctrico a su alrededor, como se muestra en la fig. 3.2. Una carga positiva de ensayo, q_o , colocada a una distancia r de q , experimentará una fuerza de la misma magnitud y de dirección radial, que trata de alejarla de q . Se dice, entonces, que q_o está sometida a la acción del campo eléctrico creado por q . Para determinar la expresión del campo eléctrico debido a una carga puntual, hacemos uso de la ley de Coulomb y dividimos

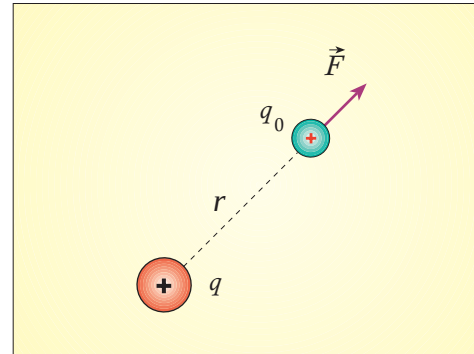


Fig. 3.2 La carga q_o , situada a una distancia r de q experimenta una fuerza radial que la aleja de esta última. Esta fuerza puede considerarse como una consecuencia del campo eléctrico.

ambos miembros entre q_o :

$$\vec{F} = k \frac{qq_o}{r^2} \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{q_o} = k \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

El campo eléctrico debido a una carga puntual en un punto P, alejado una distancia r de la carga q , es, por definición:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad (3.2)$$

La expresión anterior establece que la magnitud del campo eléctrico en un punto P, debido a una carga puntual, es directamente proporcional al valor de la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de P a la carga. Tal como habíamos mencionado en la sección anterior, el campo eléctrico depende de la carga de prueba q_o .

La dirección del vector $\vec{E}$ es la misma dirección del vector unitario $\vec{r}$. Este último se determina tomando en cuenta las coordenadas del punto donde se desea determinar el campo y las coordenadas donde está ubicada la carga que crea el campo. Si q , la carga que da origen al campo eléctrico es positiva, la dirección de $\vec{E}$ es igual a la de $\vec{r}$. Si la carga q es negativa, la dirección del campo eléctrico es opuesta a la del vector unitario $\vec{r}$. Los dos casos se muestran en la fig. 3.3.

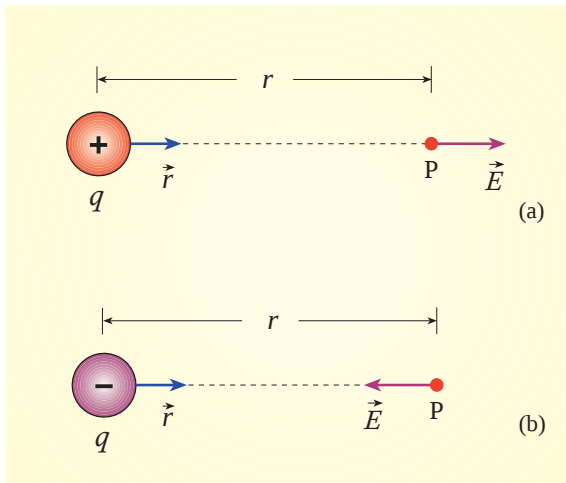


Fig. 3.3 Campo eléctrico creado por una carga puntual. **a)** Cuando la carga es positiva, el campo eléctrico tiene la misma dirección de $\vec{r}$. Es radial y sale de la carga. **b)** Cuando la carga es negativa, el campo eléctrico tiene una dirección opuesta a $\vec{r}$. Es radial y entra hacia la carga.

Cuando se tiene más de una carga puntual, el campo eléctrico resultante, en un determinado punto, se obtiene sumando vectorialmente los campos debidos a cada una de las cargas. Así, en la fig. 3.4, el campo resultante se puede expresar como:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Es relevante mencionar que cuando se trata de objetos cargados, éstos se pueden considerar constituidos por un gran número de cargas puntuales, cuyos efectos se suman vectorialmente para obtener el campo eléctrico resultante.

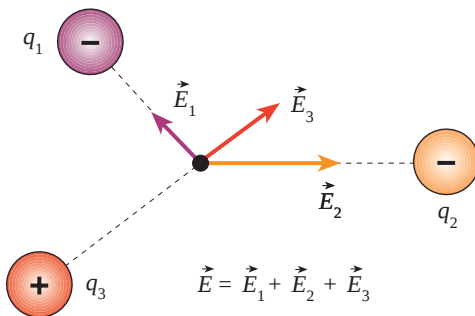


Fig. 3.4 Campo eléctrico creado por varias cargas puntuales. El campo eléctrico resultante es igual a la suma vectorial de los campos individuales de las cargas q_1 , q_2 y q_3 .

Ejemplo 3.1

Para medir la intensidad del campo eléctrico en el punto P de la fig. 3.5, se colocó allí una carga positiva de valor $q = 20 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ y se determinó que la fuerza resultante sobre la misma era de $4 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ y dirigida hacia la derecha. **a)** ¿Cuál es la intensidad del campo en el punto P? **b)** Se retira la carga anterior y en su lugar se coloca una carga negativa de $40 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza sobre esta carga?

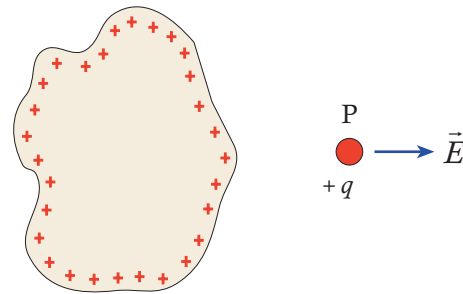


Fig. 3.5 Ejemplo 3.1.

Solución

a) Se tiene:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{20 \cdot 10^{-8}} \frac{\text{N}}{\text{C}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

b) El módulo de la fuerza sobre la carga negativa está dado por:

$$F = q \cdot E = 40 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Por tratarse de una carga negativa, la fuerza estará dirigida hacia la izquierda.

Ejemplo 3.2

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico resultante en el punto P de la fig. 3.6(a), si las cargas envueltas son: $q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ y $q_2 = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$?

Solución

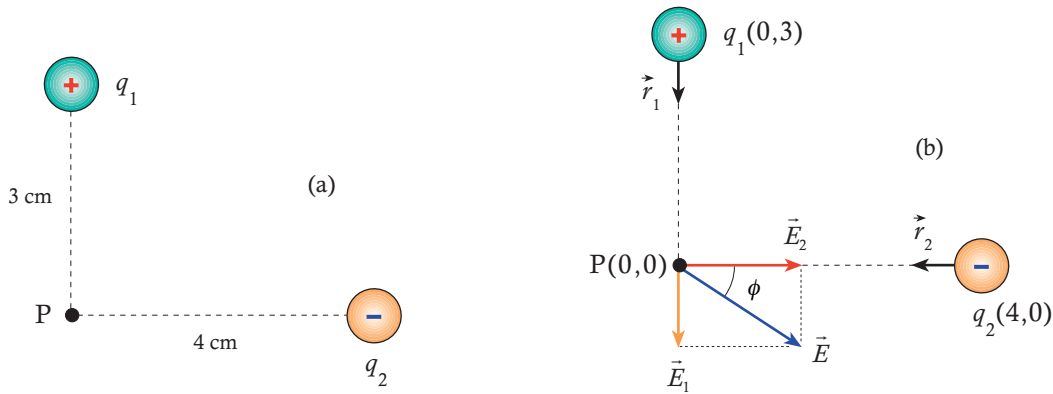


Fig. 3.6 Ejemplo 3.2. El campo en el punto P es igual a la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

La carga positiva q_1 , origina el campo $\vec{E}_1$, dirigido hacia abajo, mientras que la carga negativa q_2 da lugar al campo $\vec{E}_2$, dirigido hacia la derecha. El campo resultante puede escribirse como:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Si consideramos un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el punto P, como se presenta en la fig. 3.6(b), los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se pueden determinar mediante el uso de la relación (3.2). Los vectores unitarios $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son:

$$\vec{r}_1 = -\vec{j} \quad \vec{r}_2 = -\vec{i}$$

Los valores de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en N/C están dados por:

$$\vec{E}_1 = -9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \vec{j} = \frac{18 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} = -2 \cdot 10^7 \vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = -9 \cdot 10^9 \frac{-3 \cdot 10^{-6}}{(4 \cdot 10^{-2})^2} \vec{i} = \frac{27 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} = 1,69 \cdot 10^7 \vec{i}$$

Luego:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (1,69\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

El módulo y ángulo del campo eléctrico son:

$$E = \sqrt{(2 \cdot 10^7)^2 + (1,69 \cdot 10^7)^2} = 2,62 \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-2}{1,69} = -49,80^\circ$$

Ejemplo 3.3

En la sección 2.3 del capítulo 2 que algunas moléculas como las del agua (H_2O) se comportan en forma natural como dipolos al estar separadas la carga negativa del átomo de oxígeno de la carga positiva del átomo de hidrógeno. En otros materiales, un campo eléctrico exterior puede inducir la formación de dipolos, al provocar la orientación de sus moléculas. En la fig. 3.7 se presenta la disposición de un dipolo eléctrico y se desea calcular el campo en un punto situado sobre el eje Y, el cual está equidistante de las dos cargas.

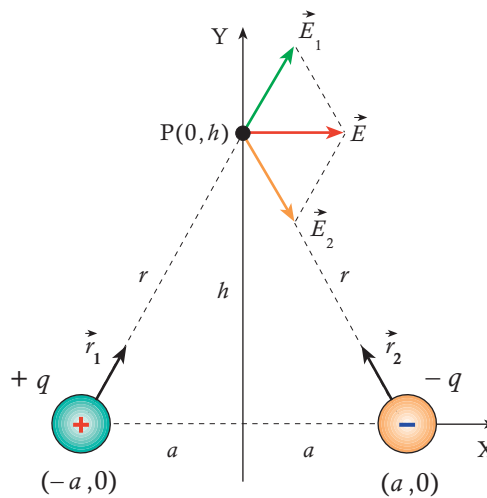


Fig. 3.7 Diagrama para determinar el campo eléctrico creado un dipolo en el punto P, ubicado sobre el eje Y.

Solución

Los vectores unitarios $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ dirigidos desde las cargas positiva y negativa hasta el punto P, donde se desea obtener una expresión para el campo eléctrico están dados por:

$$\vec{r}_1 = \frac{a\vec{i} + h\vec{j}}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad \vec{r}_2 = \frac{-a\vec{i} + h\vec{j}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Las expresiones para los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son:

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{r^2} \vec{r}_1 = k \frac{q}{r^2} \frac{a\vec{i} + h\vec{j}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q}{r^2} \vec{r}_2 = k \frac{-q}{r^2} \frac{-a\vec{i} + h\vec{j}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Como $r^2 = a^2 + h^2$, podemos escribir:

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{(a^2 + h^2)^{3/2}} (a\vec{i} + h\vec{j})$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q}{(a^2 + h^2)^{3/2}} (a\vec{i} - h\vec{j})$$

Al sumar los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se cancelan las componentes del campo según el eje Y y nos queda:

$$\vec{E} = k \frac{2qa}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Usualmente, la distancia entre las cargas de un dipolo es pequeña en comparación con la distancia al punto donde se desea calcular el campo eléctrico, por lo que $h \gg a$ y podemos despreciar a^2 en comparación con h^2 . Bajo estas condiciones el campo eléctrico de un dipolo se puede aproximar por:

$$\vec{E} = k \frac{2qa}{h^3} \vec{i}$$

Las dos últimas expresiones establecen que para un dipolo dispuesto en la forma mostrada en la fig. 3.7, el campo eléctrico en un punto situado sobre su eje tiene sólo una componente en la dirección del eje X y para distancias muy grandes, comparadas con la distancia entre las cargas, la variación es proporcional a $1/r^3$.

Ejemplo 3.4

Para la distribución de cargas mostrada en la fig. 3.8, determina la magnitud y dirección de la fuerza sobre una carga de $5 \mu\text{C}$ colocada en el punto P si $q_1 = -1 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ y $q_3 = 4 \mu\text{C}$.

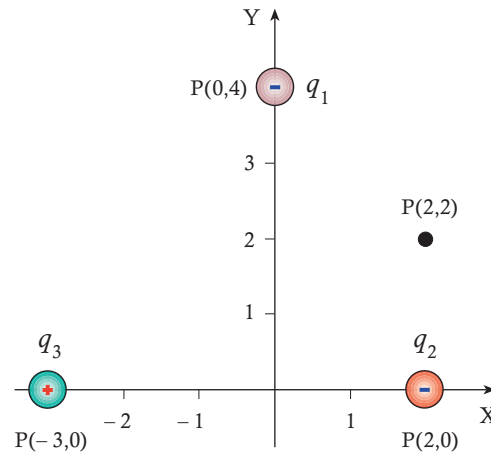


Fig. 3.8 Distribución de cargas para el ejemplo 3.4.

Solución

Para determinar el campo en el punto P, determinaremos los vectores unitarios para cada una de las cargas. En referencia a las figs. 3.8 y 3.9, tenemos:

$$\vec{r}_1 = \frac{(2-0)\vec{i} + (2-4)\vec{j}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{2\sqrt{2}} = 0,707\vec{i} - 0,707\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{(2-2)\vec{i} + (2-0)\vec{j}}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{2\vec{j}}{2} = \vec{j}$$

$$\vec{r}_3 = \frac{(2+3)\vec{i} + (2-0)\vec{j}}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{5\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{29}} = 0,928\vec{i} + 0,371\vec{j}$$

Los valores del campo eléctrico son:

$$\vec{E}_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{\pm 1 \cdot 10^{-6}}{8} (0,707\vec{i} - 0,707\vec{j}) =$$

$$\vec{E}_1 = \pm 795,375\vec{i} + 795,375\vec{j} \text{ N/C}$$

$$q_1 = 6 \mu\text{C}, q_2 = 2 \mu\text{C} \text{ y } q_3 = 4 \mu\text{C}.$$

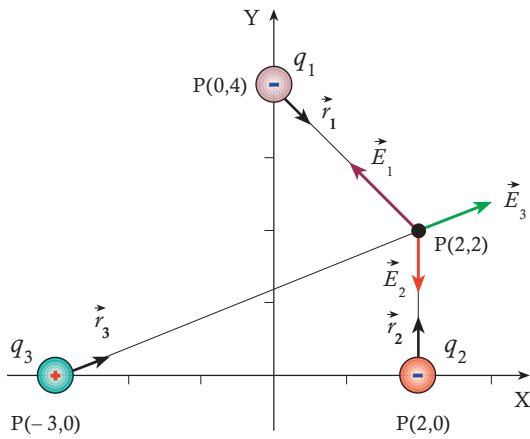


Fig. 3.9 Diagrama para la determinación de los vectores unitarios y del campo eléctrico para el ejemplo 3.4.

$$\vec{E}_2 = -9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} \vec{i} = -4.500 \vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = -4.500 \vec{i} \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{29} (0,928 \vec{i} + 0,371 \vec{j})$$

$$\vec{E}_3 = 1.152 \vec{i} + 460,55 \vec{j} \text{ N/C}$$

El campo eléctrico en el punto P es igual a la suma vectorial de $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$:

$$\vec{E} = \pm 795,375 \vec{i} + 795,375 \vec{j} - 4.500 \vec{i} + 1.152 \vec{i} + 460,55 \vec{j}$$

$$\vec{E} = -4.143,375 \vec{i} + 1.255,93 \vec{j} \text{ N/C}$$

La magnitud y el ángulo del campo resultante son:

$$E = \sqrt{4.143,375^2 + 1.255,93^2} = 4.329,54 \text{ N/C}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1.255,93}{-4.143,375} = 163,14^\circ$$

La fuerza sobre la carga de $5 \mu\text{C}$ es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-4.143,375 \vec{i} + 1.255,93 \vec{j})$$

$$\vec{F} = -0,0207 \vec{i} + 0,0063 \vec{j} \text{ N} = (0,022; 163,14^\circ)$$

3.3 LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO ELÉCTRICO

Con el fin de enfatizar la presencia del campo eléctrico alrededor de una carga puntual q , es usual hacer abstracción de la carga q_0 y dibujar líneas que, partiendo de q , indiquen cómo está dirigida la fuerza a su alrededor. A tales líneas se les denomina *líneas de fuerza*. Como se puede ver en la fig. 3.10, las líneas de fuerza son tangentes a la fuerza en un punto dado y, por tanto, tangentes al vector intensidad del campo eléctrico ($\vec{E} = \vec{F} / q$). En esa figura, una carga de prueba, colocada en tres posiciones distintas del espacio, es sometida a la acción del campo y, en cada caso, la línea de fuerza indica la dirección del campo en cada punto. Para todas las cargas positivas, las líneas de fuerza apuntan radialmente hacia afuera respecto a la carga q que crea el campo, mientras que para la carga negativa la línea de fuerza se dirige radialmente hacia adentro respecto a q . En general, podemos enunciar la siguiente definición:

Las líneas de fuerza de un campo eléctrico son líneas tangentes al vector intensidad del campo eléctrico e indican la dirección de la fuerza en cada uno de sus puntos.

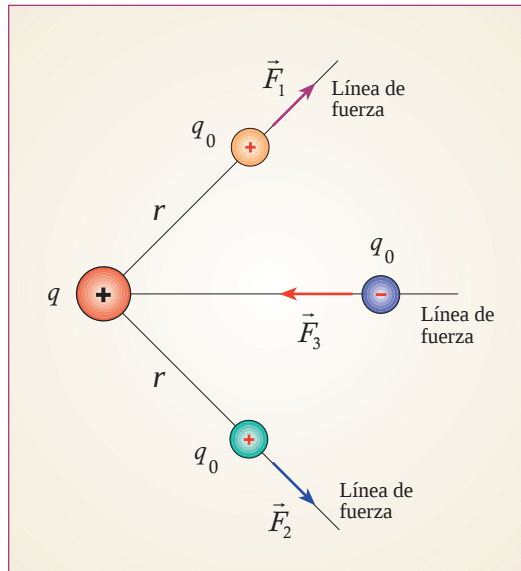


Fig. 3.10 Las líneas de fuerza indican la dirección de las fuerzas en cada punto del espacio donde existe un campo eléctrico.

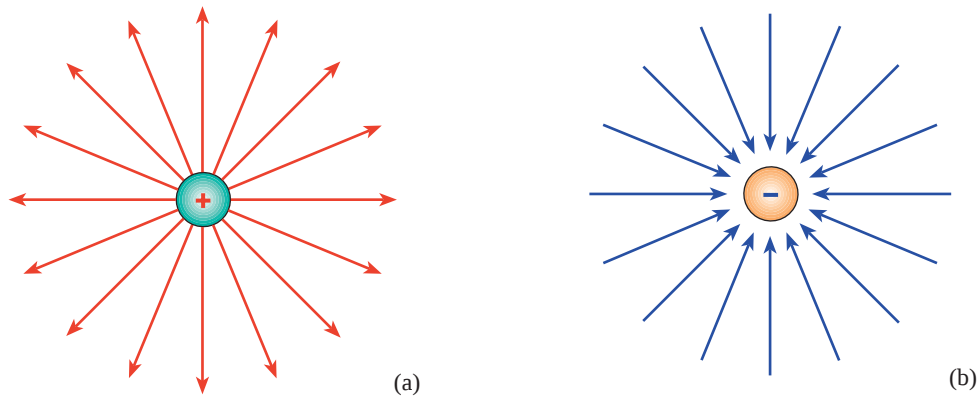


Fig. 3.11 Líneas de fuerza alrededor de una carga positiva y una carga negativa.

En la fig. 3.11 se muestran las líneas de fuerza para una carga positiva y una negativa. Cualquier carga puntual positiva colocada en el campo eléctrico de otra carga puntual positiva está sujeta a una fuerza que la aleja de esta última. De allí que las líneas de fuerza alrededor de una carga positiva diverjan a partir de la carga que genera el campo, tal como se presenta en la fig. 3.11(a).

Por el contrario, si una carga puntual negativa genera un campo eléctrico, tal como se muestra en la fig. 3.11(b), cualquier carga positiva colocada dentro del mismo estará sujeta a una fuerza que la hace acercarse. De allí que las líneas de fuerza alrededor de la carga negativa converjan hacia ella.

Cuando la distribución de cargas es más compleja, se pueden dibujar líneas de fuerza tomando en cuenta que sus trayectorias son tangentes a la dirección de la intensidad del campo en cada punto. En general, las líneas del campo eléctrico seguirán trayectorias curvas. En la fig. 3.12 se muestran las líneas de fuerza para una carga positiva y una negativa de igual magnitud. Se señala, además, el campo resultante en el punto P, dado por la suma vectorial de los campos debidos a la carga positiva ($\vec{E}_2$) y a la carga negativa ($\vec{E}_1$). El campo $\vec{E}_1$ está dirigido radialmente hacia q_1 , mientras que el campo eléctrico $\vec{E}_2$ se aleja radialmente de la carga positiva. El campo resultante es tangente a la línea de fuerza en el punto P.

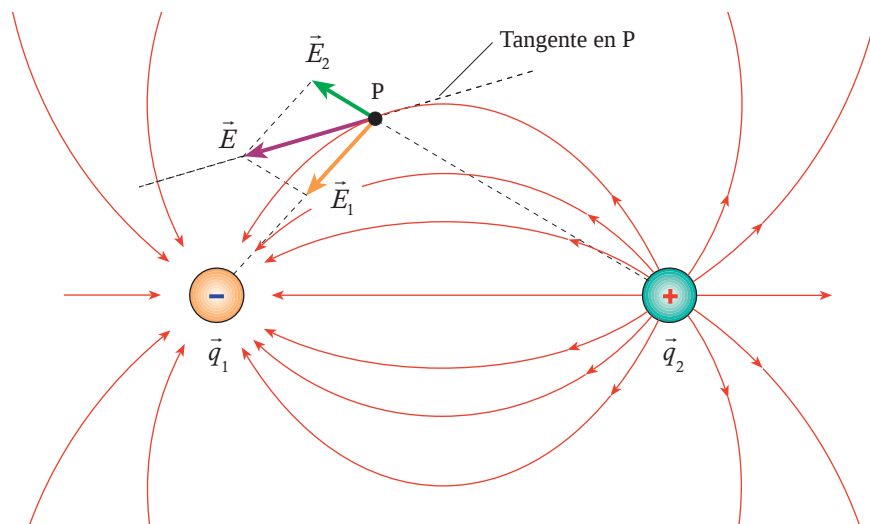


Fig. 3.12 Líneas de fuerza debidas a la presencia de una carga positiva y una negativa. La intensidad de campo resultante en el punto P, es la suma vectorial de las intensidades $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$. $\vec{E}$ tiene la dirección de la tangente en P.

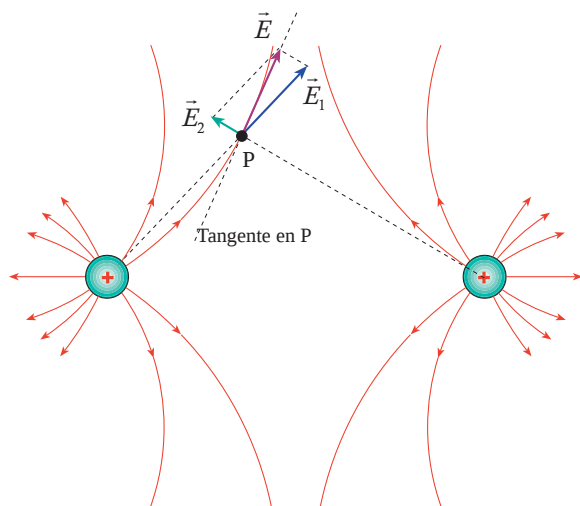


Fig. 3.13 Líneas de fuerza debidas a la presencia de dos cargas positivas iguales. La intensidad de campo resultante en el punto P, es la suma vectorial de las intensidades $\vec{E}_1$, y $\vec{E}_2$. $\vec{E}$ tiene la dirección de la tangente en P.

En el caso de dos cargas positivas de igual magnitud, las líneas de fuerza lucen como lo indica la fig. 3.13. Nuevamente, se observa que el campo eléctrico es tangente a la línea de fuerza en el punto P.

A continuación, enumeramos varias propiedades que caracterizan a las líneas de fuerza en relación con el campo eléctrico creado por cargas puntuales. Si se considera que una distribución cualquiera de carga puede ser considerada como la sumatoria de un número muy grande de cargas puntuales, esas propiedades pueden ser extendidas a cuerpos cargados de mayores dimensiones.

1. Las líneas de fuerza comienzan en cargas positivas y terminan en cargas negativas o en el infinito, en el caso que no existan cargas negativas cercanas a las cargas positivas.
2. El campo eléctrico en un punto dado es tangente a la línea de fuerza que pasa por dicho punto.
3. Dos líneas de fuerza no pueden cruzarse, ya que de hacerlo el campo eléctrico en el punto de cruce, al ser tangente a las líneas de fuerza, tendría dos direcciones distintas.

4. El número de líneas de fuerza que sale de una carga positiva o que entra en una carga negativa es proporcional a la magnitud de la carga que crea el campo eléctrico. Así, si decimos que el número de líneas que salen de una carga positiva de $5 \mu\text{C}$ es 8, de una carga positiva de $10 \mu\text{C}$ saldrán 16 líneas.
5. La densidad de líneas (número de líneas que atraviesan una superficie perpendicular a las mismas) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en una región determinada.

Veamos cómo las anteriores propiedades se aplican en el caso de una carga puntual positiva de magnitud q , tal como se muestra en la fig. 3.14:

- a) Las líneas de fuerza comienzan en la carga positiva y, en ausencia de cargas negativas a su alrededor, las líneas se dirigen radialmente hacia el infinito.
- b) Las líneas de fuerza son radiales y el campo eléctrico es también radial, siendo, por tanto, tangente a dichas líneas en cada punto del espacio que rodea a la carga.
- c) Como puede observarse, las líneas de fuerza, al ser radiales no se cruzan.
- d) El número de líneas de fuerza es 16 y, de acuerdo a ello, podemos decir que la carga q da origen a ese número de líneas. Esto a su vez significa que si

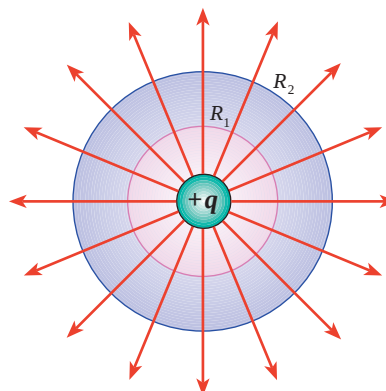


Fig. 3.14 Líneas de fuerza alrededor de una carga positiva y su relación con las propiedades de dichas líneas.

la carga aumenta a $2q$, el número de líneas aumentará a 16.

e) Las líneas atraviesan perpendicularmente las superficies esféricas de radios R_1 y R_2 . Los valores de estas superficies son:

$$A_1 = 4\pi R_1^2 \quad A_2 = 4\pi R_2^2$$

Como el número de líneas que atraviesan las dos superficies esféricas, es el mismo (16), las densidades de líneas en ambos casos serán:

$$D_1 = \frac{16}{4\pi R_1^2} \quad D_2 = \frac{16}{4\pi R_2^2}$$

Las magnitudes del campo eléctrico a distancias R_1 y R_2 están dadas por:

$$E_1 = k \frac{q}{R_1^2} \quad E_2 = k \frac{q}{R_2^2}$$

Combinando las relaciones anteriores, podemos demostrar que el campo es proporcional a la densidad de líneas sobre las superficies esféricas:

$$E_1 = k \frac{q}{R_1^2} = k \frac{\frac{q}{16}}{\frac{4\pi D_1}{16}} = \frac{4\pi q}{16} D_1 = \lambda D_1$$

$$E_2 = k \frac{q}{R_2^2} = k \frac{\frac{q}{16}}{\frac{4\pi D_2}{16}} = \frac{4\pi q}{16} D_2 = \lambda D_2$$

donde λ es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3.5

En la fig. 3.15 se muestran dos cargas puntuales y las líneas de fuerza alrededor de las mismas. **a)** ¿Cuál es el signo de las cargas. **b)** Determina la relación entre las magnitudes de las cargas. **c)** Comenta sobre la intensidad del campo eléctrico en las regiones cercanas a las dos cargas. **d)** ¿Por qué no entran a la carga q_2 el mismo número de líneas de fuerza que salen de q_1 ?

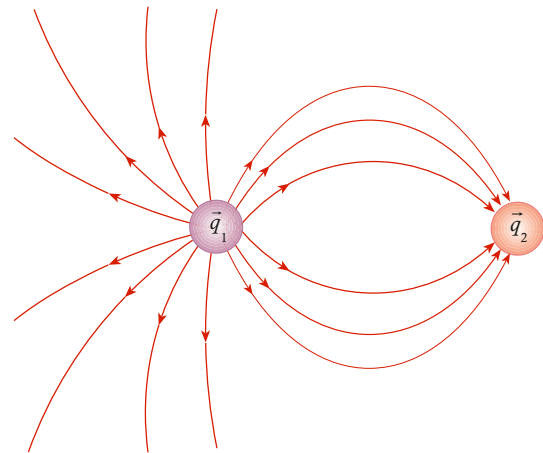


Fig. 3.15 Ejemplo 3.5.

Solución

a) Como las cargas salen de q_1 y entran a q_2 , la primera es negativa, mientras que la segunda es negativa.

b) De la carga q_1 salen 14 líneas, mientras que a q_2 entran 6 líneas. Como el número de líneas es proporcional a las cargas que las generan, podemos escribir:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{7}{3} q_2$$

c) El campo eléctrico alrededor de q_1 es más intenso que el campo alrededor de q_2 . Esto se deduce de la cantidad de líneas cercanas a las cargas. Por otro lado, el campo es más débil al lado derecho de la carga q_2 , ya que en esa zona no hay líneas de fuerza.

d) Es precisamente la diferencia entre las cargas lo que hace que el número de líneas de fuerza que salen de q_1 no sea igual al número de líneas que entran en q_2 . la diferencia entre las que salen y las que entran ($14 - 6 = 8$), se alejan de la carga positiva y, por convención, se dice que se dirigen al infinito.

3.4 CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Un campo eléctrico uniforme es aquel cuyo módulo y cuya dirección son constantes en una región del espacio. Para dar una idea de campos eléctricos uniformes,

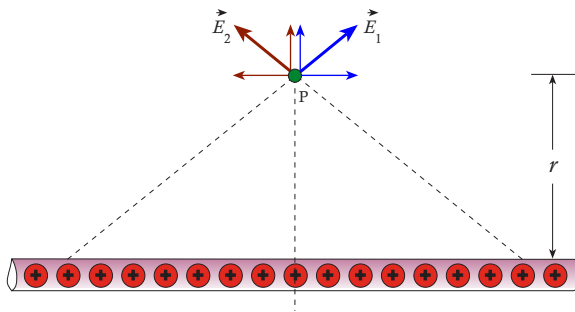


Fig. 3.16 Campo eléctrico de una línea de carga infinita.

consideremos una línea muy larga, que posee una carga positiva distribuida de manera uniforme a lo largo de la misma, como se muestra en la fig. 3.16. Esto significa que la carga por unidad de longitud, a la cual designaremos λ , es la misma en cualquier segmento de línea considerado. La dirección del campo eléctrico en un punto P es perpendicular a la línea, ya que las componentes horizontales, si la línea es infinita, se cancelan, tal como se puede ver de la fig. 3.16. Se puede demostrar, usando recursos fuera del alcance de este texto, que la magnitud del campo eléctrico a una distancia r de la línea tiene una magnitud dada por:

$$E = 2k \frac{\lambda}{r} \quad (3.3)$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente, el campo eléctrico a una distancia r de una línea infinita de carga puede visualizarse como se indica en la fig. 3.17, donde los vectores representativos de dicho campo apuntan todos en la misma dirección y tienen igual magnitud.

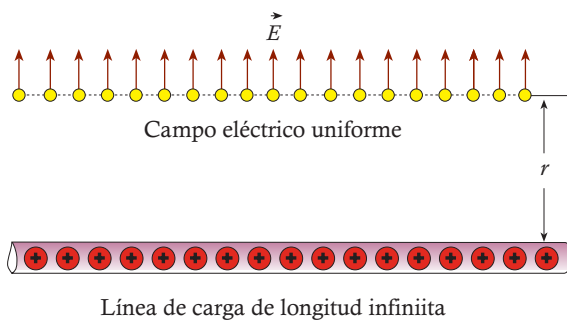
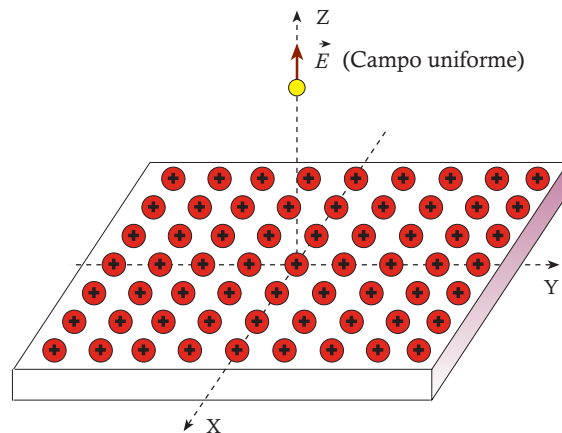


Fig. 3.17 El campo eléctrico en un punto situado a una distancia r de una línea de carga infinita es de igual magnitud y dirección; es decir, es uniforme.

Como una extensión de una línea infinita de carga, consideremos ahora un plano de cargas, que puede ser considerado como integrado por un gran número de líneas infinitas de carga positiva, tal como se presenta en la fig. 3.18. La carga en el plano es uniforme, lo que significa que el número de cargas por unidad de superficie, conocida como *densidad de carga* (σ), es la misma para cualquier pedazo de superficie sobre el plano. Puede demostrarse que el campo eléctrico a una distancia cualquiera del plano es constante, perpendicular al plano y está dado por:

$$E = 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.4)$$



Plano de carga de superficie infinita

Fig. 3.18 Campo eléctrico de un plano infinito de carga.

Un caso importante de campo eléctrico constante lo representa aquél existente entre dos láminas paralelas, muy próximas entre sí y que tienen cargas opuestas, negativas y positivas, tal como se muestra en la fig. 3.19. En el espacio entre las láminas, la magnitud del campo debida a la lámina positiva, es, según la relación (3.4), igual a $\sigma/2\epsilon_0$. El campo está dirigido hacia la derecha. La magnitud del campo, debido a la lámina cargada negativamente, es también igual a $\sigma/2\epsilon_0$. Sin embargo, está dirigido también hacia la derecha. Como consecuencia, el campo eléctrico resultante es igual a σ/ϵ_0 .

El campo eléctrico fuera del espacio entre las láminas es nulo, ya que en estas regiones, se oponen los campos creados por dichas láminas.

Es importante mencionar aquí que cuando el campo

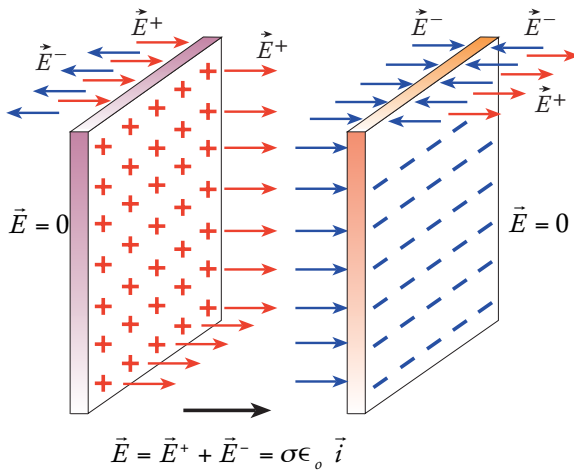


Fig. 3.19 Campo eléctrico entre dos láminas paralelas.

eléctrico es uniforme, las líneas de fuerza se dibujan con la misma separación entre ellas.

3.5 MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN ZONAS DE CAMPOS ELÉCTRICOS

Cuando una carga puntual de magnitud q ingresa en una región donde existe un campo eléctrico, se verá sometida a una fuerza de magnitud $F = qE$. Si la partícula tiene una masa m , la aceleración que se imprime a la misma está dada por:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (3.5)$$

relación que establece tanto la magnitud como la dirección de la aceleración de una partícula en un campo eléctrico. La magnitud es igual a qE/m , mientras que la dirección dependerá del signo de la carga: si ésta es positiva, la aceleración tendrá la misma dirección de $\vec{E}$, mientras que si es negativa, la aceleración tendrá dirección contraria a la de $\vec{E}$.

La aceleración dada por la relación (3.5) puede ser variable o constante, según sea el valor del campo eléctrico $\vec{E}$. Si se trata del campo creado por una carga puntual, por ejemplo, la expresión del mismo es:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector radial unitario que determina la dirección del campo eléctrico

La aceleración de la carga puntual se obtiene a partir de (3.5):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{E} = \frac{q}{m} k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r = k \frac{q^2}{m} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

Como puede observarse de la relación anterior, la aceleración disminuye con el cuadrado de la distancia al punto donde está situada la carga.

En el caso de campos uniformes, como el existente entre láminas cargadas, muy próximas entre sí, la relación (3.5) se aplica sin grandes complicaciones. En la fig. 3.20 una carga positiva, sometida a la acción del campo, es llevada hacia la lámina negativa bajo la acción de la fuerza $\vec{F}_1$, de igual dirección que el campo, mientras que sobre una carga negativa se ejerce una fuerza $\vec{F}_2$ de dirección contraria al campo, que la lleva hacia la lámina positiva.

El movimiento de partículas cargadas en el campo de láminas paralelas puede tener lugar en dos trayectorias relevantes: en una de ellas la trayectoria de una carga puntual es paralela a las líneas del campo, mientras que en la otra la dirección del movimiento es perpendicular a las líneas del campo. La fig. 3.21 ilustra las dos trayectorias.

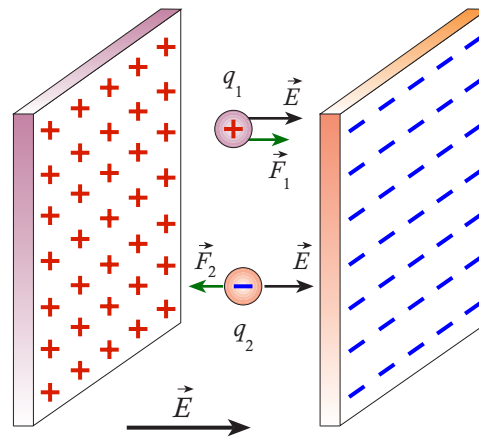


Fig. 3.20 La fuerza sobre la carga positiva tiene la misma dirección que el campo, mientras que la fuerza sobre la carga negativa tiene una dirección contraria a la del campo.

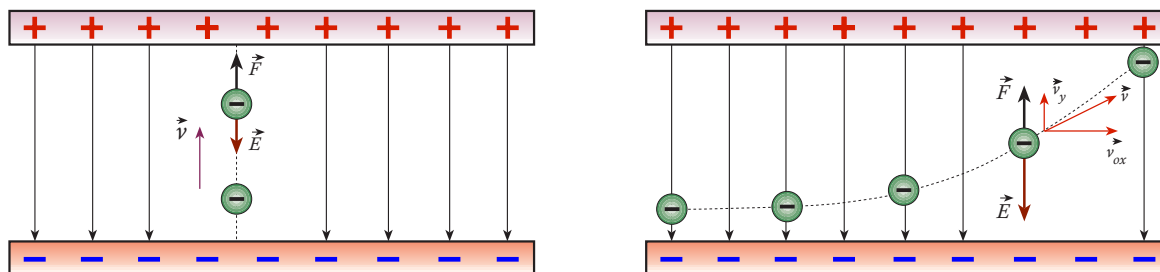


Fig. 3.21 Si una carga negativa se deja en reposo entre dos láminas cargadas o se lanza en una trayectoria paralela a las líneas de fuerza, la carga permanece en una trayectoria paralela a dichas líneas. Si la carga negativa se lanza en una dirección perpendicular a las líneas de fuerza, su trayectoria es parabólica, tal como sucede con un objeto lanzado horizontalmente en el campo gravitatorio.

En el primer caso, la carga puntual negativa se desplaza paralela a las líneas de fuerza, dirigiéndose hacia la lámina positiva. La aceleración, la distancia recorrida y la velocidad adquirida por la carga obedecen al movimiento lineal, cuya formulación matemática se ha estudiado en cursos anteriores.

La segunda opción, obedece a ecuaciones similares a las de un movimiento parabólico de un objeto sometido a la acción del campo gravitatorio.

Ejemplo 3.6

La operación de un tubo de luz es relativamente simple: dentro del tubo hay un gas inerte como neón, argón o kriptón a baja presión. A ambos lados del tubo se colocan electrodos metálicos. Cuando

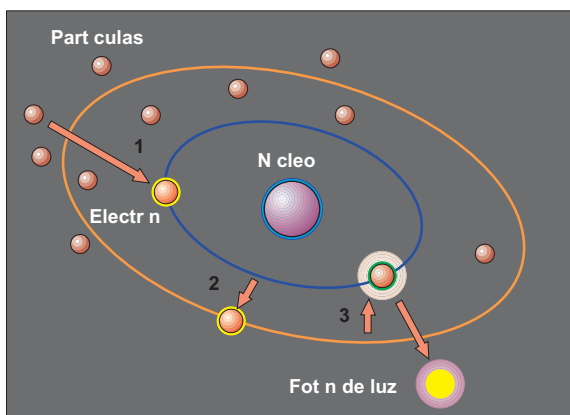


Fig. 3.22 Mecanismo de emisión de luz en un átomo. Partículas cargadas sacan momentáneamente a un electrón de su órbita y éste, al regresar posteriormente a la misma, emite un fotón de luz.

se aplica un alto voltaje en los electrodos, el gas inerte se ioniza con carga positiva, al dejar escapar electrones, los cuales fluyen a través del gas. Estos electrones excitan los átomos del gas obligándolos a emitir luz. El gas neón emite luz roja, mientras otros gases emiten luces de diversos colores. En la fig. 3.22 se presenta el mecanismo de emisión de luz: una partícula en movimiento (1) choca con un electrón, le cede su energía cinética y lo hace saltar a una órbita más lejana del núcleo (2); luego, el electrón regresa a su órbita original, cediendo la energía que poseía en forma de un fotón de luz.

En un tubo de neón, fig. 3.23, se colocan electrodos en sus extremos, los cuales generan un campo de 20.000 N/C. Este campo acelera electrones libres, los cuales chocan y ionizan los átomos de neón, proporcionándoles una carga positiva. La masa de los iones de neón es de $3.35 \cdot 10^{-26}$ kg y su carga es de $1.6 \cdot 10^{-19}$ C. ¿Cuál es la aceleración de los iones?

Solución

El movimiento de los iones es en la misma dirección del campo y se puede calcular según (3.5):

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4}{3,35 \cdot 10^{-26}} = 9,55 \cdot 10^{10} \text{ m/s}$$

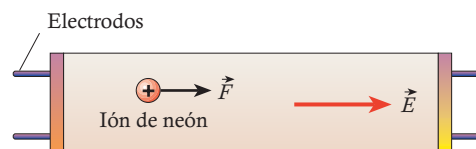


Fig. 3.23 Aceleración de un ión en un tubo de neón.

Ejemplo 3.7

En una fotocopidora, el llamado tambor de imágenes es cargado selectivamente con una carga positiva, de manera que el mismo atrae partículas de tóner, con cargas negativas, para formar una imagen de lo que se desea copiar. El campo creado por el tambor tiene una magnitud de $3 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Cada partícula de tóner tiene una masa de $4 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$. **a)** ¿Cuál debe ser la magnitud de la carga negativa de la partícula de tóner para que sea atraída por el tambor con una fuerza 5 veces mayor que su peso? **b)** Si el campo se mantuviera uniforme, cuál sería la aceleración de la partícula de tóner, su velocidad y la distancia recorrida al cabo de 50 ms, si parte del reposo?

Solución

a) El peso de cada partícula de tóner es:

$$p = mg = (4 \cdot 10^{-12}) \cdot (9,8) = 3,92 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

La fuerza de atracción, entonces, debe ser:

$$F = 4p = 5 \cdot 3,92 \cdot 10^{-11} = 1,96 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

Como $F = q \cdot E$, podemos escribir:

$$q = \frac{F}{E} = \frac{1,96 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^4} = 6,5 \cdot 10^{-13} \text{ C}$$

b) La aceleración vendrá dada por:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1,96 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 10^{-12}} = 49 \text{ m/s}^2$$

La velocidad y la distancia recorrida son:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2 = 6,13 \text{ cm}$$

$$v_f = at = 49 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 2,45 \text{ m/s}$$

Ejemplo 3.8

En un tubo de rayos catódicos, componente esencial de los monitores de las computadoras y los televisores, los electrones se hacen pasar a lo largo de placas paralelas de cargas con signos opuestos,

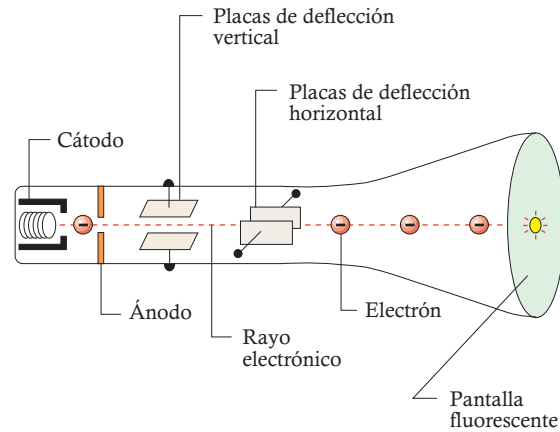


Fig. 3.24 Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos.

como se muestra en la fig. 3.24. Del cátodo (electrodo negativo) se desprenden los electrones que son acelerados por el ánodo (electrodo positivo). Las placas de deflexión desvían a los electrones en su camino hacia una pantalla fluorescente, y el impacto sobre esta última produce una luz visible. Es ese conjunto de impactos lo que da origen a las imágenes que observamos en la pantalla. Entre las placas de deflexión vertical un campo eléctrico mueve el haz electrónico hacia arriba o hacia abajo, mientras que las placas de deflexión horizontal lo desplaza de derecha a izquierda o viceversa. Si suponemos que el campo entre las placas es uniforme, el electrón describe, dentro del campo de un par de placas, una trayectoria similar a la presentada en la fig. 3.25.

Supongamos que un electrón es lanzado entre dos placas deflectoras con una velocidad inicial de 10^7 m/s y que el campo eléctrico es de 2.000 N/C . Determina: **a)** La aceleración del electrón. **b)** Las distancias horizontal y vertical recorrida en 10^{-8} s .

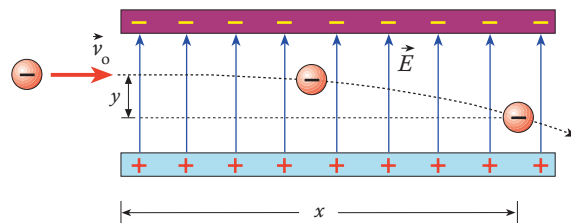


Fig. 3.25 Movimiento de un electrón cuando incide perpendicularmente a las líneas del campo eléctrico entre dos placas paralelas cargadas. La trayectoria es parabólica.

Solución

a) El electrón se dirige hacia la placa positiva, siguiendo una trayectoria parabólica. La aceleración del electrón es:

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.000}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 3,52 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$$

b) Al igual que en el movimiento parabólico en el campo gravitatorio de la Tierra, la velocidad horizontal, v_{ox} , se mantiene constante:

$$v_{ox} = 10^7 \text{ m/s}$$

La distancia horizontal recorrida por el electrón es:

$$x = v_{ox} t = 10^7 \cdot 10^{-8} = 0,1 \text{ m}$$

La distancia vertical que desciende el electrón tiene la expresión:

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,52 \cdot 10^{14} \cdot (10^{-8})^2 = 1,76 \text{ cm}$$

3.6 FLUJO ELÉCTRICO

En la sección 3.3 mencionamos que el número de fuerzas que entran o salen de una carga es proporcional al valor de dicha carga. Este número es seleccionado arbitrariamente a conveniencia. Si, por ejemplo, consideramos un dipolo encerrado en una superficie cerrada, fig. 3.26, y seleccionamos

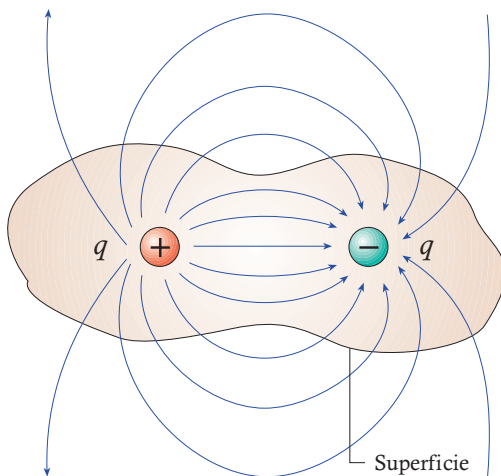


Fig. 3.26 El flujo neto que atraviesa la superficie es cero.

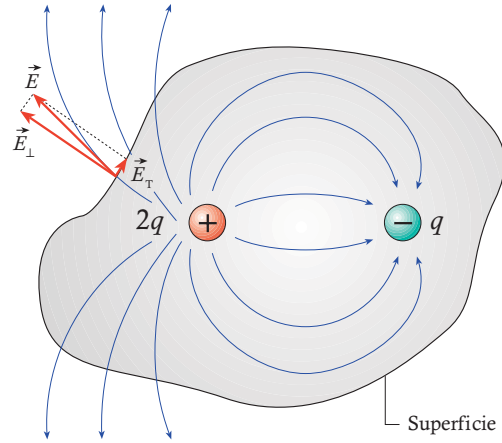


Fig. 3.27 El flujo neto que atraviesa la superficie no es cero, ya que salen más líneas de la carga positiva que las que entran a la carga negativa.

13 líneas de fuerza para representar al campo creado por la carga q , el mismo número de líneas que salen de esa carga entrarán a la carga $-q$, ya que las magnitudes de las cargas son iguales. Estas líneas salen y entran de la superficie cerrada. Si asignamos signo positivo a las líneas que entran y negativo a las que salen, el número neto de líneas que pasan por la superficie es igual a cero ($13 - 13 = 0$). Es importante destacar que esto es así, para cualquier superficie que encierre ambas cargas. En todo caso, debe tenerse presente que si de una superficie cerrada el número de líneas que salen es mayor que el número de líneas que entra esa superficie encierra una carga neta positiva. Si, por el contrario, hay más líneas que entran en relación con las que salen, la superficie encierra una carga neta negativa. Esto es ilustrado en la fig. 3.27. Dentro de la superficie se encuentra una carga positiva que duplica la magnitud de la carga negativa. Por lo tanto, si se seleccionan, como se hace en la fig. 3.26, 6 líneas de fuerza para representar una carga de magnitud q , otra carga de magnitud $2q$ será representada por 12 líneas de fuerza. Luego, de la superficie cerrada salen 6 líneas de fuerza, número que está relacionado con la diferencia $2q - q = q$ correspondiente a la carga neta encerrada por la superficie.

Es de hacer notar que cuando las líneas de fuerza salen de la superficie, forman un ángulo cualquiera con la misma. Las mismas señalan la dirección del

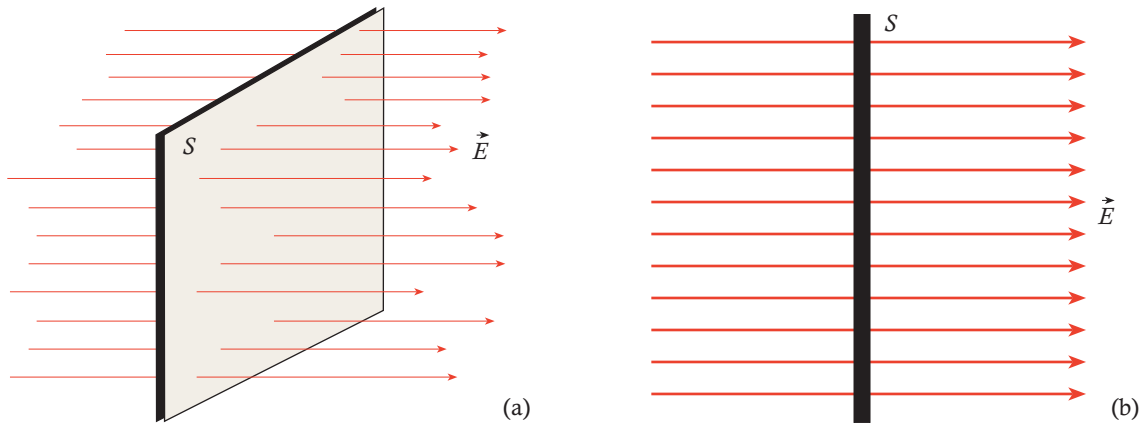


Fig. 3.28 a) La superficie A es atravesada perpendicularmente por líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme de magnitud E . Al producto $E \cdot A$ se le denomina *flujo eléctrico*. b) Vista lateral de la superficie A y del campo $\vec{E}$. Como el campo es uniforme, las líneas se dibujan espaciadas una misma distancia.

campo eléctrico en el punto de cruce con la superficie y el vector que lo representa puede ser descompuesto en una componente perpendicular ($\vec{E}_\perp$) y otra componente tangencial ($\vec{E}_T$) a la misma, tal como se representa en la fig. 3.26. *Sólo las componentes perpendiculares del campo se dice que atraviesan la superficie en cualquier punto de la misma.*

El número de líneas de fuerza que atraviesa el límite de una superficie está relacionado con lo que se conoce como *flujo eléctrico*. Para entender este concepto, hagamos referencia a la fig. 3.28 (a). Se trata de un campo eléctrico uniforme cuyas líneas de fuerza atraviesan la superficie S . Por tratarse de un campo uniforme, las líneas de fuerza están igualmente espaciadas, como se ve en la fig. 3.28 (b). Es decir:

$$\phi = E \cdot A$$

(3.6)

El flujo eléctrico, ϕ , se define como el producto de la magnitud del campo eléctrico por la superficie S .

Hay que enfatizar que el campo que se toma en cuenta para determinar el flujo es aquel cuyas líneas de fuerzas son perpendiculares a la superficie S .

Si las líneas del campo eléctrico no son perpendiculares a la superficie, se presenta la situación de la fig. 3.29. En este caso, la componente normal o perpendicular a la superficie S es $\vec{E} \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo que las líneas de fuerza del campo con la superficie. Aun cuando el campo sigue siendo uniforme, la expresión del flujo será ahora:

$$\phi = E \cdot A \cdot \cos \phi$$

(3.7)

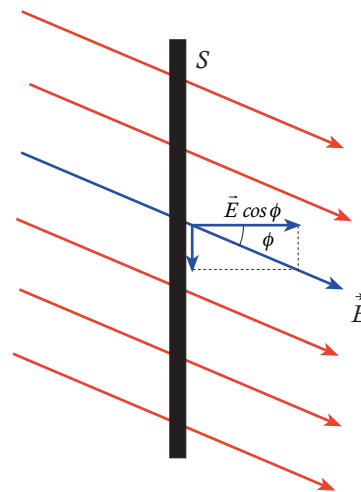


Fig. 3.29 Cuando las líneas del campo no son perpendiculares a la superficie, la componente normal es la que da lugar a la existencia del flujo eléctrico.

Como la unidad del campo es el newton/coulomb, de acuerdo a la relación (3.6) la unidad de flujo es el newton/coulomb por m^2 ($\text{N m}^2/\text{C}$).

En la sección (3.3), establecimos que la magnitud del campo eléctrico es proporcional a la densidad de líneas (número de líneas que atraviesan una superficie perpendicular a las mismas) en una región determinada. Entonces, de acuerdo a (3.6), $\phi = E \cdot A$, y el flujo eléctrico es también proporcional al número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie considerada. Lo anterior podemos expresarlo de la manera siguiente:

$$E = \lambda \frac{N}{S} \Rightarrow \phi = E \cdot S = \lambda \frac{N}{S} \cdot S = \lambda N \quad (3.8)$$

donde λ es una constante de proporcionalidad que depende del número de líneas que se seleccione para representar a una carga determinada, q , N es el número de líneas y S es la superficie atravesada por las líneas del campo eléctrico.

Lo expuesto anteriormente en relación con una superficie plana, como las mostradas en las figuras 3.28 y 3.29, puede ser extendida a cualquier superficie curva sobre la cual el concepto de flujo es completamente válido. Veamos cómo aplica el mismo para la fig. 3.30. Una carga q se encuentra en el interior de un volumen rodeado de una superficie curva irregular. El campo eléctrico en el

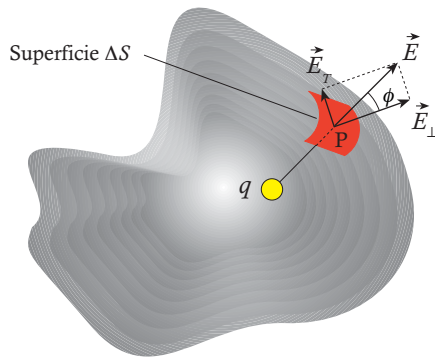


Fig. 3.30 Una carga q se encuentra dentro de un volumen encerrado por una superficie de forma irregular. El campo eléctrico creado por q en un pequeño pedazo de la superficie total no es perpendicular a la misma. Como resultado, es el campo eléctrico debido a la componente perpendicular $\vec{E}_\perp$, en el punto considerado, la que contribuye al flujo eléctrico.

punto P , sobre la pequeña superficie ΔS , no es perpendicular a la misma. Si se descompone al campo eléctrico en sus dos componentes, sólo la componente perpendicular, $E_\perp = E \cos \phi$, contribuye al flujo eléctrico. Para obtener el flujo total debido a la carga q , sobre toda la superficie, podemos imaginar a la misma dividida en un gran número de pequeñas superficies ΔS y sumar las contribuciones de cada uno de los flujos elementales aportados por las mismas. De esta forma, podemos escribir:

$$\phi_{Total} = \sum_{\text{Área Total}} E_\perp \Delta S = \sum_{\text{Área Total}} (E \cos \phi) \Delta S \quad (3.9)$$

donde ϕ_{Total} es el flujo sobre el área total que encierra a la carga y $E_\perp$ es el campo eléctrico perpendicular a la superficie elemental ΔS . El signo de sumatoria Σ indica que cada uno de los productos $(E \cos \phi) \Delta S$ deben añadirse, en toda la superficie, para obtener el flujo total.

Ejemplo 3.9

Una carga positiva de magnitud q se encuentra en el centro de una esfera de radio r . Determina el flujo eléctrico a través de la superficie esférica.

Solución

En la fig. 3.31 se muestra la geometría del problema. Un corte transversal de la esfera, que pasa por su centro, revela la presencia de la carga positiva q , de las líneas de fuerza (color azul) y del vector campo eléctrico (color rojo). Sobre la superficie esférica se ha seleccionado una superficie elemental, ΔS , en la cual se examinará el flujo eléctrico, $\Delta \phi$, que no es más que una pequeña parte del flujo total, ϕ_{Total} , que atraviesa la superficie esférica.

Una análisis en la superficie elemental nos indica que las líneas de fuerza tienen la misma dirección que el vector campo eléctrico. Es decir, el ángulo entre ellos es igual a cero. Aún más, la magnitud del campo es la misma en todas las superficies elementales en las que podamos dividir la superficie esférica completa. Como $\phi = 0^\circ$, $\cos \phi = 1$ y la relación (3.8) para calcular el flujo total puede

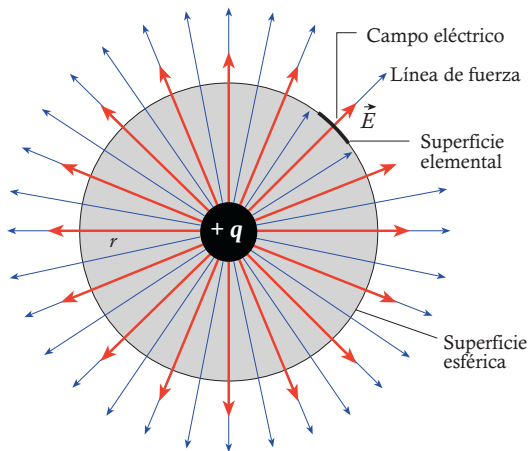


Fig. 3.31 Ejemplo 3.9: esquema geométrico para determinar el flujo eléctrico a través de una superficie esférica, creado por una carga puntual que se encuentra en el interior de la misma.

expresarse de la manera siguiente:

$$\phi_{Total} = \sum_{\text{Área Total}} (E \cos \phi) \Delta S = \sum_{\text{Área Total}} E \Delta S$$

Como el campo es uniforme en todas las superficies elementales, podemos sacarlo del signo de sumatoria:

$$\phi_{Total} = E \sum_{\text{Área Total}} \Delta S$$

Ahora bien, $\sum \Delta S$ es la suma de todas las superficies elementales y, por tanto, igual al área de la superficie esférica de radio r dada por $4\pi r^2$. Luego, la relación anterior puede escribirse como:

$$\phi_{Total} = E \sum_{\text{Área Total}} \Delta S = 4\pi r^2 E$$

De acuerdo a la relación (3.2), el módulo del campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual es:

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

Sustituyendo en la relación anterior:

$$\phi_{Total} = 4\pi r^2 k \frac{q}{r^2} = 4\pi k q \quad \Rightarrow \quad \phi_{Total} = 4\pi k q$$

Observa que el flujo total es directamente proporcional a la carga encerrada y es independiente del radio de la superficie esférica.

3.7 LEY DE GAUSS

En el ejemplo anterior vimos que el flujo neto debido a una carga puntual encerrada por una superficie esférica es igual a $4\pi k q$, cantidad independiente de r . Ahora bien, q es proporcional al número de líneas que atraviesa la superficie y, evidentemente, este número no depende de la forma de la superficie, sino de la magnitud de la carga. Como el flujo y el número de líneas son proporcionales entre sí, la relación $\phi = 4\pi k q$ es válida para cualquier superficie que encierre la carga. Este razonamiento, independiza el valor del flujo del tipo de volumen que encierre una carga puntual.

Si en lugar de una carga puntual consideramos, por ejemplo, 3 cargas puntuales colocadas en la posición mostrada en la fig. 3.32, con relación a una superficie cualquiera S , podemos hacer las siguientes deducciones:

1. El flujo que atraviesa la superficie S , proveniente de q_3 es cero, ya que las líneas de fuerzas que se originan en esa carga entran y salen de S . En la fig. 3.31, se muestra una de esas líneas.
2. El flujo neto debido a q_1 es $4\pi k q_1$ y el flujo neto debido a q_2 es $4\pi k q_2$. Por tanto el flujo neto debido a la carga encerrada ($q_1 + q_2$) es $4\pi k (q_1 + q_2)$.

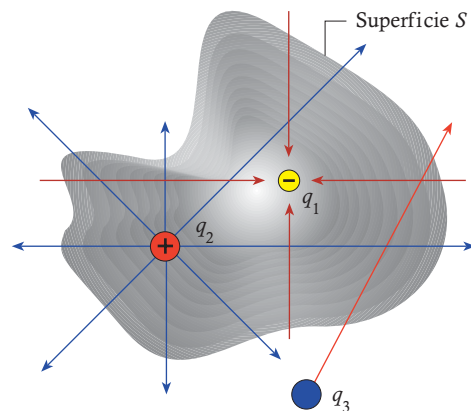


Fig. 3.32 La superficie S encierra a las cargas q_1 y q_2 . La carga q_3 es exterior la superficie. El flujo neto a través de S , es proporcional a la diferencia de las cargas q_1 y q_2 .

Observése que se han seleccionado 4 líneas y 8 líneas, para representar al campo eléctrico alrededor de q_1 y q_2 , respectivamente. Esto equivale a decir que la magnitud de q_2 es el doble de la magnitud de q_1 . Es decir si $q_1 = -q$, la carga q_2 es igual a $2q$. La carga encerrada sería, entonces, $2q - q = q$ y el flujo neto a través de la superficie S sería igual a $4\pi kq$.

Los resultados obtenidos anteriormente nos conducen a la ley de Gauss, que establece lo siguiente:

El flujo neto a través de cualquier superficie que encierre es a $4\pi k$ veces la carga encerrada dentro de dicha superficie.

El valor del flujo puede ser positivo o negativo, dependiendo de las diferencias de signo y magnitud de las cargas encerradas. La ley de Gauss se expresa matemáticamente como sigue:

$$\phi_{\text{neto}} = 4\pi kq_{\text{encerrada}} \quad (3.10)$$

Como $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, la ley de Gauss se escribe como:

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{encerrada}} \quad (3.11)$$

La ley de Gauss se utiliza con frecuencia en la determinación de la magnitud del campo eléctrico en algunas configuraciones de carga que poseen alto grado de simetría. Para hacer uso de esta ley, es necesario seleccionar convenientemente una *superficie gaussiana* que encierre a las cargas que crean el campo y que cumplan con las siguientes condiciones:

1. La magnitud del campo debe ser constante sobre la superficie gaussiana.
2. La dirección del campo, en el punto donde se desea obtener su magnitud, debe ser perpendicular a la superficie gaussiana.

Ejemplo 3.10

Mediante la ley de Gauss, determina el campo eléctrico a una distancia r , debido a una carga puntual q .

Solución

En la fig. 3.33 se muestra la carga q , encerrada por una superficie gaussiana esférica, cuyo centro es la carga q y cuyo radio es la distancia r , a la cual se desea obtener el campo. Como puede observarse, debido a la simetría, la magnitud del campo es constante sobre la superficie esférica y su dirección es perpendicular a dicha superficie en cualquier punto sobre la misma. Combinando las relaciones (3.9) y (3.10), obtenemos:

$$\phi_{\text{neto}} = \sum_{\text{Área Total}} (E \cos \phi) \Delta S = \sum_{\text{Área Total}} E \Delta S = 4\pi kq$$

donde el flujo neto y el área total se refieren a la superficie gaussiana. Como E es constante sobre dicha superficie, podemos escribir:

$$E \sum_{\text{Área Total}} \Delta S = 4\pi kq \Rightarrow E(4\pi r^2) = 4\pi kq$$

Finalmente:

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

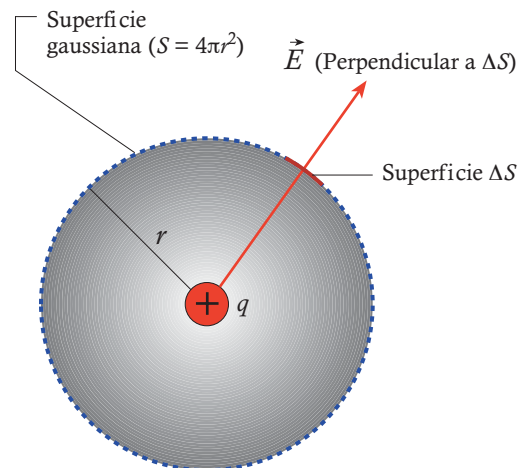


Fig. 3.33 Uso de la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico debido a una carga puntual q .

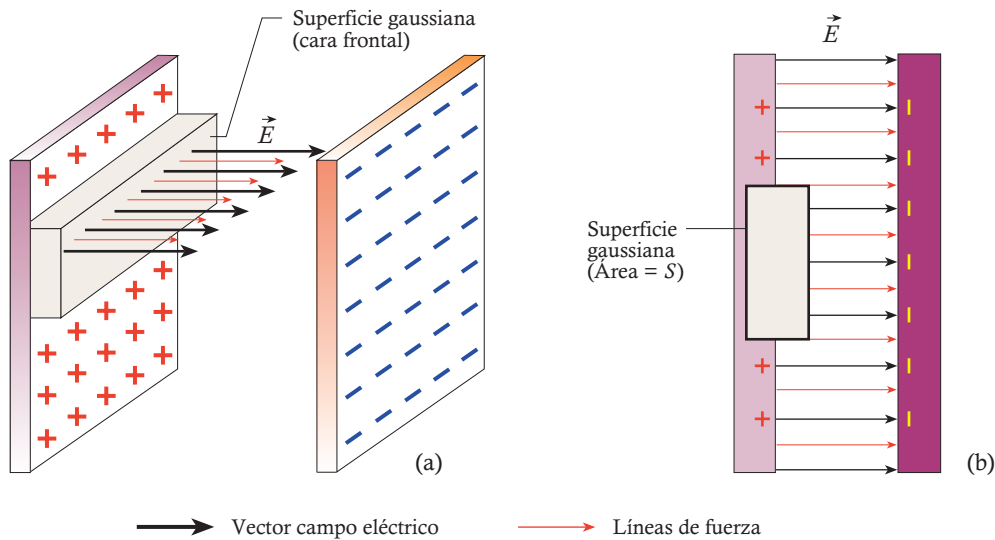


Fig. 3.34 a) Uso de la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico en el espacio entre dos láminas paralelas con cargas opuestas. b) Vista lateral de las láminas y la superficie gaussiana. Las líneas de fuerza y el campo eléctrico tienen la misma dirección sobre la cara frontal de la superficie gaussiana.

Ejemplo 3.11

Determina el campo eléctrico entre dos láminas paralelas con cargas de igual magnitud y opuestas en signo, como las que se muestran en la fig. 3.34. Usa la ley de Gauss.

Solución

En este caso, seleccionamos una superficie gaussiana que encierre a las cargas positivas de la lámina de la izquierda. El campo eléctrico es constante y tiene la misma dirección que las líneas de fuerza en la parte frontal de la superficie gaussiana. Por las características de la configuración, no hay flujo eléctrico en las otras caras. En la fig. 3.34 (b) se muestra una vista lateral de las láminas y de la superficie gaussiana. Podemos usar, nuevamente, la relación:

$$\phi_{\text{neto}} = \sum_{\text{Área Total}} (E \cos \phi) \Delta S = \sum_{\text{Área Total}} E \Delta S = 4\pi kq$$

Como el campo es uniforme y paralelo a las líneas de fuerza, tendremos:

$$E \cdot S = 4\pi kq$$

donde S se reduce al área frontal de la superficie gaussiana. Usualmente, la carga de una superficie

se expresa mediante la *densidad superficial de carga*, denotada por σ . Es decir, $\sigma = q/S$. Sustituyendo esa cantidad en la relación anterior, nos queda:

$$E = \frac{4\pi kq}{S} = \frac{4\pi kq}{q/\sigma} = 4\pi k\sigma = 4\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

3.8 CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Un buen conductor eléctrico es un material en el cual los electrones de la órbita más externa de sus átomos pueden moverse con mucha libertad dentro de la estructura atómica. Los metales son ejemplo de buenos conductores. Cuando un metal neutro, en cuyo interior no hay cargas en exceso, se introduce en un campo eléctrico, inmediatamente los electrones libres se mueven bajo la acción del mismo. Sobre los electrones se ejercen fuerzas que los hacen emigrar en una dirección opuesta a la del campo. Esta acción es muy rápida y se extiende por tiempos que están alrededor de $1 \mu\text{s}$. Cuando el reajuste de cargas cesa, se dice que el conductor se encuentra en *equilibrio electrostático*.

La situación descrita anteriormente se presenta, de manera simplificada, en la fig. 3.35.

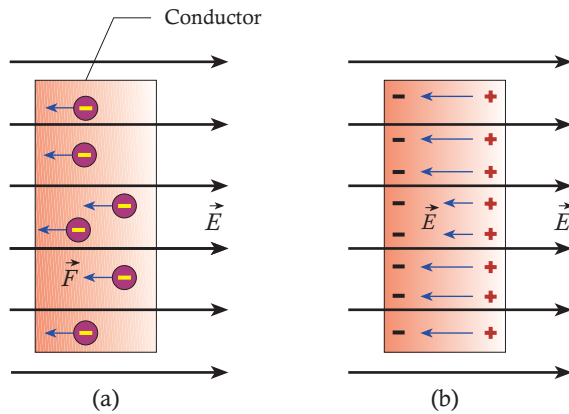


Fig. 3.35 Conductor en un campo eléctrico externo al mismo. a) Cuando se introduce el conductor en el campo, los electrones libres experimentan una fuerza de dirección contraria al campo que los desplaza hacia la izquierda. b) Una vez que se estabiliza el movimiento de electrones, el conductor queda polarizado y se induce un campo dentro del mismo que se opone al campo aplicado. Como resultado, el campo resultante en el interior del conductor se anula.

Supongamos que en una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme de magnitud E . Al momento de introducir el conductor en el campo eléctrico externo, $\vec{E}$, los electrones libres son obligados a moverse hacia la izquierda por la fuerza $\vec{F}$. Luego de cierto tiempo, en el conductor se crea una carga negativa del lado izquierdo y una carga positiva del lado derecho. Esta acumulación de cargas produce un campo eléctrico en el interior del conductor, que contrarresta el campo externo. Como resultado, el campo interno en el conductor se reduce a cero. Entonces podemos afirmar:

El campo eléctrico en el interior de un conductor que se encuentra en equilibrio electrostático es nulo.

Como consecuencia del análisis anterior, podemos afirmar que *las cargas en un conductor neutro que se encuentra dentro de un campo eléctrico externo residen en la superficie del mismo.*

Ejemplo 3.12

Mediante la ley de Gauss, determina el campo eléctrico a una distancia r de a una esfera conductora

de radio R , que tiene una carga Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Los detalles se presentan en la fig. 3.36.

Solución

Con el fin de obtener el campo eléctrico de la esfera, dibujamos una superficie gaussiana esférica de radio r , igual a la distancia donde se desea obtener una expresión para el campo. Si ponemos atención a una superficie elemental, ΔS , sobre la superficie gaussiana, observamos que el vector campo eléctrico es perpendicular a la misma. En general, el campo es de igual magnitud y perpendicular en cada punto de esa superficie, por lo que $E \cos \phi = E \cos 0^\circ = E$ y tenemos:

$$\phi_{\text{neto}} = \sum_{\text{Área sobre superficie gaussiana}} (E \cos \phi) \Delta S = E \sum_{\text{Área sobre superficie gaussiana}} \Delta S = 4\pi kQ$$

Dado que $\sum \Delta S$ es la suma de todas las superficies elementales, ese valor es igual al área de la superficie esférica dada por $4\pi r^2$. Entonces:

$$4\pi r^2 E = 4\pi kQ \quad \Rightarrow \quad E = k \frac{Q}{r^2}$$

Relación que indica que el campo es similar al de una carga puntual Q situada en el centro de la esfera.

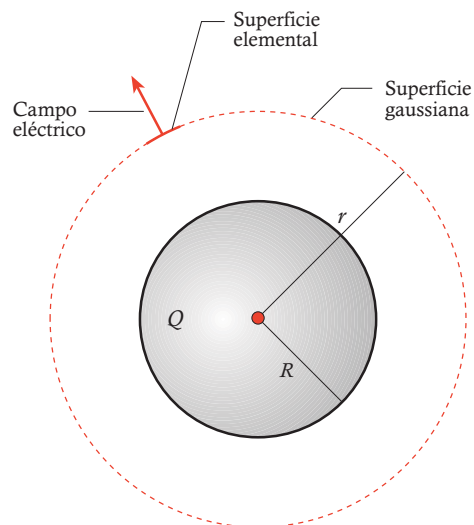


Fig. 3.36 Ejemplo 3.12: uso de la ley de Gauss para la determinación del campo eléctrico debido a una esfera cargada.

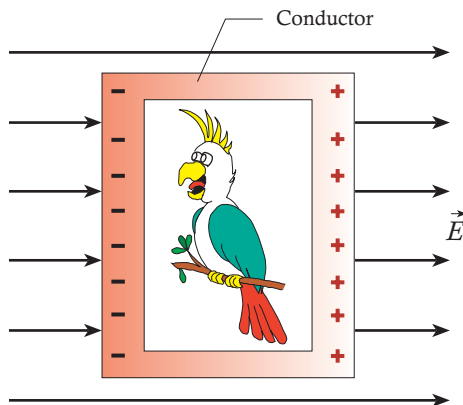


Fig. 3.37 Debido a la ausencia del campo eléctrico en el interior del conductor, el lorito no es afectado por el campo eléctrico.

3.9 BLINDAJE ELECTROSTÁTICO

Hemos establecido, en la sección anterior, que el campo en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. Este hecho da lugar a importantes implicaciones tecnológicas. Por ejemplo, es posible utilizar una cubierta metálica para protegerse de la acción de los campos eléctricos. Una delgada capa de papel de aluminio, alrededor de un objeto, es suficiente para aislarlo de la influencia de campos eléctricos externos. *Blindaje electrostático* es la expresión que se usa para designar esta protección, la cual es comúnmente utilizada en sistemas electrónicos.

Para mostrar cómo se produce el blindaje electrostático, consideremos nuevamente un conductor sometido a la acción de un campo eléctrico uniforme, fig. 3.37. En el interior del conductor, el campo interno debido a $\vec{E}$ y el campo interno en el conductor tienen direcciones opuestas y, por tanto, se anulan. De esta forma, si se hace un orificio rectangular dentro del material conductor, el lorito colocado en ese orificio no será afectado por la acción del campo externo. Esta es la razón por la cual se recomienda que, en el caso de tormentas con rayos, las personas pueden refugiarse en el interior de un vehículo, pues su cubierta metálica impide que el campo electromagnético penetre dentro del mismo.

Como otro ejemplo, consideremos una carga positiva, Q , en el centro de una cáscara esférica, tal

como se muestra en la fig. 3.38. Veamos cómo sería el campo en las distintas regiones del espacio ocupado por la configuración. Para ello, usaremos tres superficies gaussianas: en el interior de la cáscara (alrededor de la carga), dentro del material conductor de la cáscara y fuera de la cáscara. Todas ellas son señaladas en la figura mediante líneas punteadas. Así, tenemos:

1. Interior de la cáscara (línea blanca punteada): la carga encerrada por la superficie gaussiana es igual a Q y la magnitud del campo está dado por la relación:

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

2. Interior de la cáscara conductora (línea azul punteada): la carga Q induce una carga negativa de igual magnitud sobre la corteza interna de la cáscara. Como consecuencia, la carga encerrada es nula y, por tanto, el campo en su interior es, también, nulo.
3. Exterior de la cáscara (línea negra punteada): la carga neta encerrada es igual a Q y, de nuevo, el campo está dado por la relación anterior ($E = k/Qr^2$).

De lo expuesto, se obtiene como conclusión que la cáscara esférica, tal como está configurada en la fig. 3.38, no ofrece blindaje alguno para evitar la

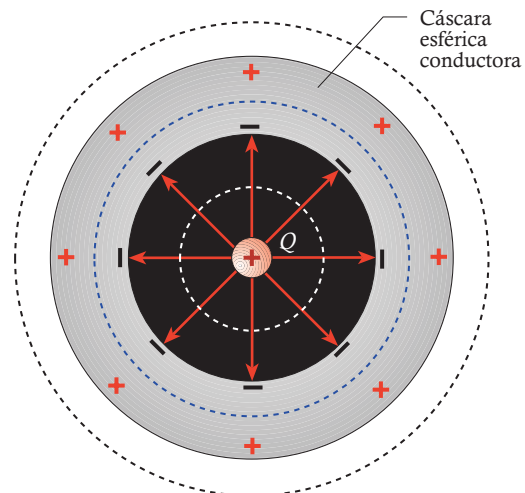


Fig. 3.38 Campo eléctrico de una carga positiva, rodeada de una cáscara conductora.

presencia del campo eléctrico fuera de la misma, debido a la carga Q , interna a la cáscara. Es decir, aun cuando en su interior el campo es nulo, fuera de la cáscara no lo es. En muchos circuitos electrónicos, esta condición es indeseable y, por ello, se utiliza una *conexión a tierra* para lograr el blindaje, tal como se muestra en el fig. 3.39. De esta manera, electrones de la Tierra suben hacia la cáscara metálica hasta que neutralizan la carga positiva en el centro, $+Q$. Si se utilizara ahora una superficie gaussiana en el exterior de la cáscara, la carga neta dentro de ella sería cero y, por tanto, el campo externo sería nulo. Este tipo de conexión es frecuente en los equipos electrónicos, donde se utilizan cables blindados por envolturas metálicas que son conectadas a «la tierra» de esos equipos.

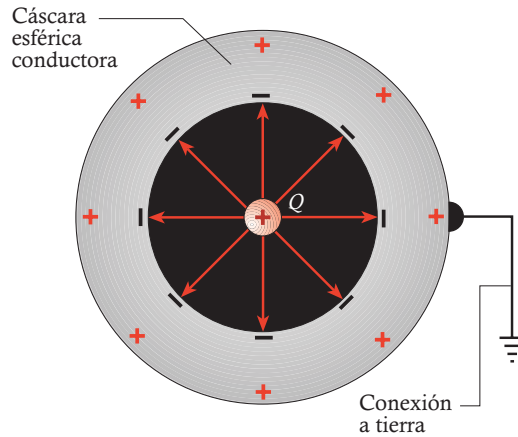
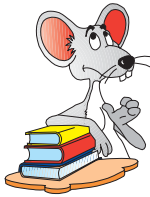


Fig. 3.39 Para anular el campo externo a la cáscara metálica, se utiliza una conexión a tierra.



PIENSA Y EXPLICA



- 3.1** ¿Cómo definirías el campo eléctrico? ¿De qué forma podrías asegurar que en una región del espacio existe un campo eléctrico?
- 3.2** Explica por qué el campo eléctrico es independiente de la carga de prueba que se use para determinar su presencia.
- 3.3** Escribe la relación matemática que define el campo eléctrico y explica su significado. ¿Cuál es la unidad de campo eléctrico en el SI?
- 3.4** Deduce la fórmula que establece cuál es el campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q . ¿Cómo se determina el vector unitario que figura en dicha fórmula?
- 3.5** ¿Cuál es la importancia de determinar el campo eléctrico de una carga puntual si muchos de los objetos cargados no son, precisamente cargas puntuales?

- 3.6** ¿Cuál es la diferencia entre el campo eléctrico creado por una carga positiva y una negativa? ¿Cuál es, en cada caso, la dirección del vector unitario y de la fuerza sobre una carga negativa?
- 3.7** Si en lugar de una sola, hay varias cargas, negativas y positivas, en una región del espacio, ¿cómo se determina el campo eléctrico resultante?
- 3.8** Explica qué son las líneas del campo eléctrico y di cómo podrías determinar la dirección del campo a partir del diagrama donde se muestren las líneas.
- 3.9** A partir de las figuras 3.12 y 3.13, describe la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto P.
- 3.10** ¿Hacia dónde se dirigen las líneas de fuerza de cargas puntuales, positivas o negativas, aisladas?

3.11 Enumera las propiedades que caracterizan a las líneas de fuerza

3.12 ¿Por qué no pueden cruzarse dos líneas de fuerza?

3.13 ¿Cómo está relacionado el campo eléctrico con el número de líneas de fuerza?

3.14 ¿Qué se entiende por un campo eléctrico uniforme? Explica por qué los campos a una distancia r de una línea infinita y de un plano infinito, cargados, son uniformes.

3.15 Haciendo uso de la relación (3.4) y de la fig. 3.19, explica cuál es la magnitud del campo eléctrico en el espacio dentro y fuera de las láminas.

3.16 Describe el movimiento de cargas positivas o negativas en el campo creado entre láminas paralelas. Considera los casos de movimientos de las cargas, paralelo o perpendicular, a las líneas del campo eléctrico

3.17 Explica el mecanismo de emisión de luz en un átomo y en un tubo de neón.

3.18 ¿Cuál es la definición de flujo eléctrico? Escribe la fórmula que lo describe cuando las líneas de fuerza son perpendiculares o forman un cierto ángulo con la superficie.

3.19 Explica cómo puede calcularse el flujo total sobre una superficie curva que encierra una carga q . Haz referencia a la fig. 3.30 y a la relación (3.9).

3.20 ¿A qué se denomina flujo total o neto sobre una superficie cerrada?

3.21 Enuncia la ley de Gauss y establece sus fundamentos teóricos, tal como se explicó en la sección 3.7.

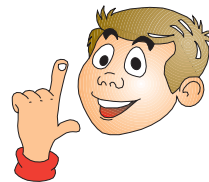
3.22 ¿Qué es una superficie gaussiana? ¿Qué condiciones debe cumplir el campo sobre una superficie gaussiana para facilitar su cálculo en configuraciones de carga que presenten alta simetría?

3.23 ¿Qué es el blindaje electrostático? ¿Cómo puede implementarse?

3.24 Haciendo referencia a la fig. 3.39, explica por qué es necesario una «conexión a tierra» para evitar la acción de una carga encerrada por una cáscara esférica.



PROBLEMAS



3.1 Un electrón aislado experimenta una fuerza de $4 \cdot 10^4$ N/C. ¿Cuál es la magnitud del campo en ese punto?

3.2 Determina la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto situado cerca de la superficie terrestre, si un electrón experimenta una fuerza que compensa su peso.

3.3 En la fig. 3.40, $Q_1 = 2Q_2$. ¿En que punto de la recta que las une el campo eléctrico es nulo?



Fig. 3.40 Problema 3.2.

- 3.4** Resuelve el problema anterior si Q_1 es positiva y Q_2 es negativa.
- 3.5** Se colocan cuatro cargas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado, como se indica en la fig. 3.41. Si $q_1 = -10 \mu\text{C}$, $q_2 = -10 \mu\text{C}$, $q_3 = 5 \mu\text{C}$ y $q_4 = 5 \mu\text{C}$, determina el campo eléctrico en el centro del cuadrado.
- 3.6** Dos cargas puntuales de valores $+10 \text{ nC}$ y -2 nC están separadas 4 m como se muestra en la fig. 3.42. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico a una distancia de 4 m de la carga negativa?

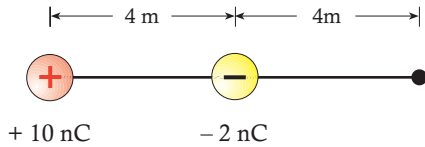


Fig. 3.42 Problema 3.6.

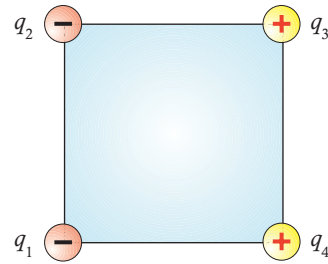


Fig. 3.41 Problema 3.5.

- 3.7** Dos cargas q_1 y q_2 están separadas por una distancia L , como se indica en la fig. 3.43. q_1 está situada en el origen. En un punto P, ubicado a una distancia $L/3$ de q_1 , el campo eléctrico es nulo. Determina la relación q_1/q_2 .

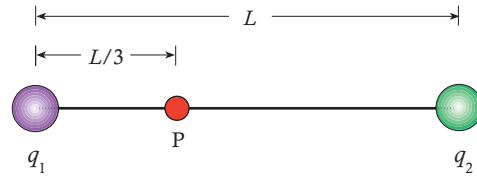


Fig. 3.43 Problema 3.7.

- 3.8** Dos cargas, q_1 y q_2 , se colocan sobre el eje X, separadas una distancia de 1 m. Como se indica en la fig. 3.44, q_1 se encuentra en el origen. Si el campo eléctrico resultante sobre el eje X es cero a $x = 0,75 \text{ m}$ y es igual a 12 N/C a $x = 2 \text{ m}$, ¿cuál es el valor de las cargas?

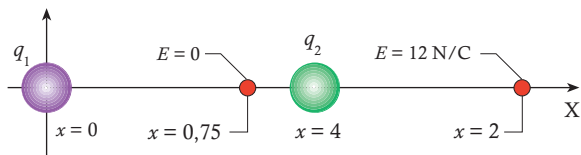


Fig. 3.44 Problema 3.8.

- 3.9** Cada una de las cargas de la fig. 3.45 tiene una magnitud Q . ¿En cuál de las configuraciones el campo eléctrico es mayor en el centro del cuadrado?

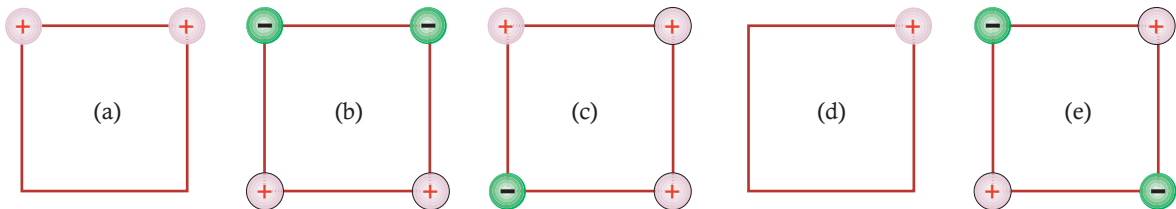


Fig. 3.45 Problema 3.9.

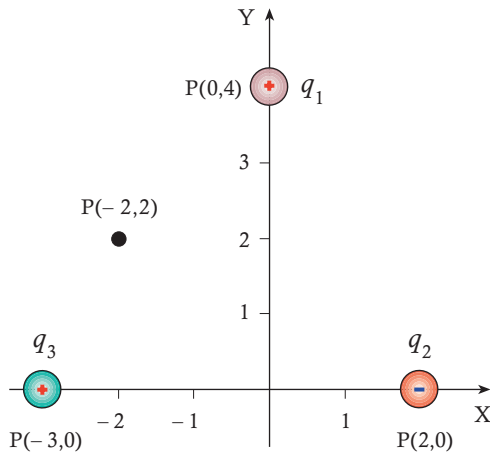


Fig. 3.45 Problema 3.11.

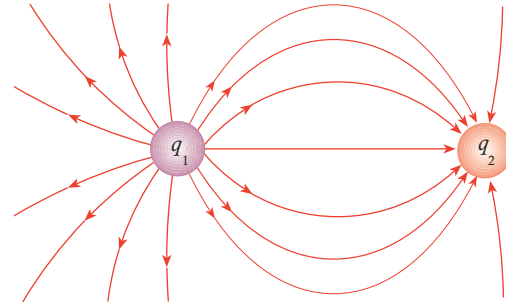


Fig. 3.47 Problema 3.13.

- 3.10** A una distancia de 1 m de una carga puntual, la intensidad del campo eléctrico es de 200 N/C. ¿A qué distancia de la carga el campo eléctrico tiene una intensidad de 100 N/C.
- 3.11** Determina el valor del campo eléctrico, en módulo y dirección, en el punto P de la fig. 3.46, si $q_1 = 2 \text{ nC}$, $q_2 = -2 \text{ nC}$ y $q_3 = 3 \text{ nC}$. Usa la notación vectorial del campo.
- 3.12** En una cierta región de la atmósfera el campo eléctrico está dirigido hacia la superficie terrestre y tiene una magnitud de 500 N/C. Como resultado de este campo, una gota esférica de diámetro 20 μm se mantiene suspendida en el aire. a) ¿Cuál es el peso de la gota? b) ¿Cuántos electrones en exceso posee la gota?
- 3.13** Para la fig. 3.47, determina: a) El signo de las cargas. b) La relación entre las magnitudes de las cargas. c) Las zonas donde es mayor el campo eléctrico.

- 3.14** Se tienen dos placas paralelas de cargas q y $-2q$, como se ilustra en la fig. 3.48. a) Dibuja las líneas de flujo del campo eléctrico en el interior y exterior de las placas. b) ¿Cuál es el valor del campo en el interior de las placas?

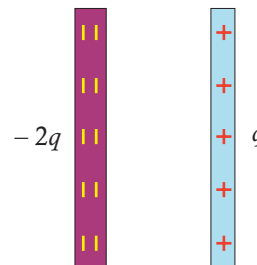


Fig. 3.48 Problema 3.14.

- 3.15** En la fig. 3.49, las líneas del campo eléctrico en la región del lado derecho tiene el doble de la separación de las líneas del lado izquierdo. La magnitud del campo en el punto A es de 50 N/C. ¿Qué fuerza actúa sobre un electrón en los puntos A y B?

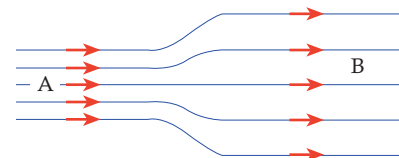


Fig. 3.49 Problema 3.15.

- 3.16** Una línea infinita de carga tiene una carga por unidad de longitud (λ) de $2 \mu\text{C}/\text{m}$. Determina la fuerza ejercida (magnitud y dirección) sobre una carga de $10 \mu\text{C}$ alejada 10 cm de la línea.
- 3.17** Resuelve el problema anterior si la carga está distribuida en un plano infinito que posee una densidad superficial de carga (σ) de $-50 \mu\text{C}/\text{m}^2$.
- 3.18** Una partícula con una relación carga a masa de $0,2 \text{ C/kg}$ se abandona, con una velocidad inicial igual a cero, en un campo uniforme de magnitud 20 N/C . ¿Qué distancia recorrerá en 2 s ?
- 3.19** Una lámina aislante muy grande tiene una densidad superficial de carga negativa de $-2 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Se deja en libertad un protón a una distancia de 1 m de la lámina. ¿En cuánto tiempo el protón alcanza la lámina?
- 3.20** ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio de la distancia perpendicular entre dos líneas de longitud infinita cuyas densidades lineales de carga son λ y $-\lambda$?

3.21 Una lámina aislante infinita tiene una densidad superficial de carga, $\sigma = 0,5 \text{ C}/\text{m}^2$ y descansa sobre el plano $Z - Y$, como se muestra en la fig. 3.50. Una carga $q = -2 \mu\text{C}$ está ubicada a 1 m del origen. ¿En qué puntos sobre el eje X es el campo eléctrico nulo?

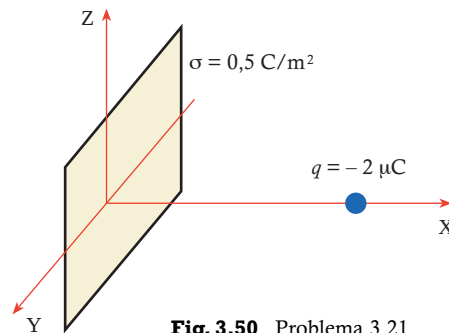


Fig. 3.50 Problema 3.21.

3.22 El campo eléctrico entre las láminas paralelas de la fig. 3.51 es de 250 N/C . Se lanza un electrón entre las láminas con una velocidad inicial de $4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. a) ¿Cuál es la aceleración del electrón dentro de las láminas? b) ¿Qué tiempo tarda el electrón en salir del campo? c) ¿Chocará el electrón contra la lámina positiva? d) ¿Cuál es la velocidad del electrón al salir del campo?

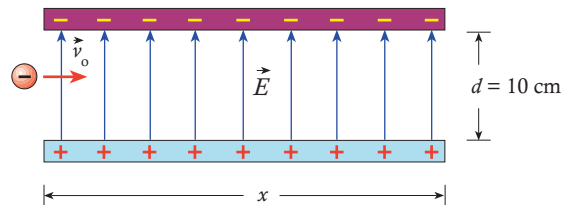


Fig. 3.51 Problema 3.22.

3.23 Un electrón es lanzado dentro de un campo eléctrico uniforme de magnitud $5 \cdot 10^4 \text{ N/C}$, con una velocidad inicial de $4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, la cual forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. a) ¿Qué altura máxima alcanza el electrón? b) ¿Qué tiempo tarda en llegar a su máxima altura? c) ¿Cuál es el alcance máximo del electrón?

3.24 Para la fig. 3.52, determina el flujo eléctrico a través de: a) La superficie rectangular de la izquierda. b) La superficie triangular. c) La superficie rectangular inclinada. d) La superficie total de la cuña.

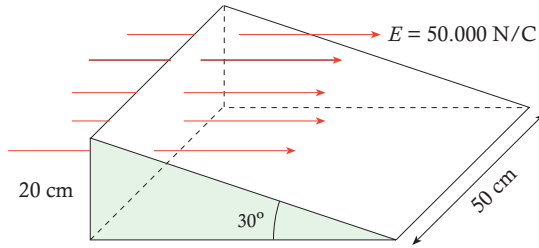


Fig. 3.52 Problema 3.23.

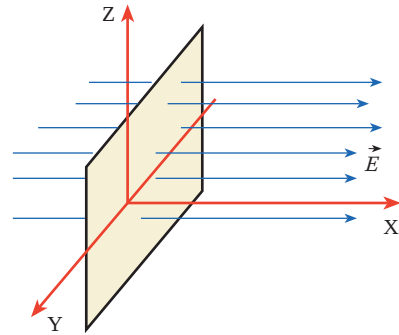


Fig. 3.53 Problema 3.24.

3.24 En la fig. 3.53, un campo eléctrico uniforme cuya expresión vectorial es $\vec{E} = 2.500\vec{i}$ N/C, atraviesa perpendicularmente una superficie rectangular plana de lados 20 cm y 10 cm. **a)** ¿Cuál es el flujo a través de esta superficie? **b)** Si la superficie se inclina un ángulo de 30° , con respecto a las líneas de flujo, ¿cuál es el valor del flujo, bajo esta nueva condición?

3.25 Se coloca una carga $+Q$ sobre una cáscara esférica conductora, como se muestra en la fig. 3.54. Una segunda cáscara conductora con una carga $-Q$ rodea a la primera. Usa la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico debido a esta configuración de cargas en las regiones siguientes: **a)** $r < R$. **b)** $R < r < 2R$. **c)** $r > R$.

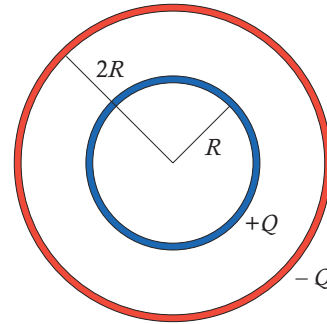
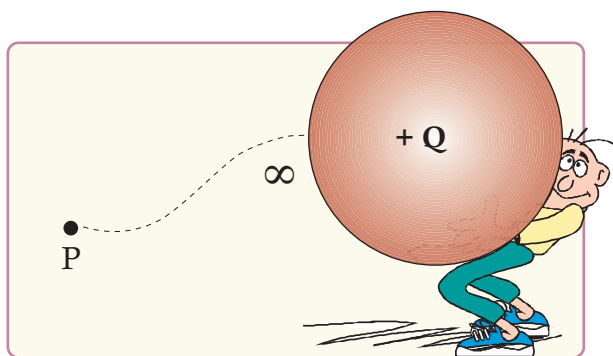


Fig. 3.54 Problema 3.25.

CAPÍTULO 4

POTENCIAL ELÉCTRICO



4.1 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

A fin de entender el concepto de energía potencial eléctrica, repasaremos la idea desarrollada en cursos anteriores sobre la energía potencial gravitatoria. Un cuerpo puede almacenar energía de acuerdo a la posición donde se encuentre, energía que le ha sido transferida, de algún modo, por un agente externo. Supongamos que tenemos que subir un envase desde una mesa hasta una cierta altura, como se muestra en la fig. 4.1. El peso que sentimos, al levantar el envase, no es más ni menos que la fuerza con la cual la gravedad atrae a la lata hacia el centro de la Tierra.

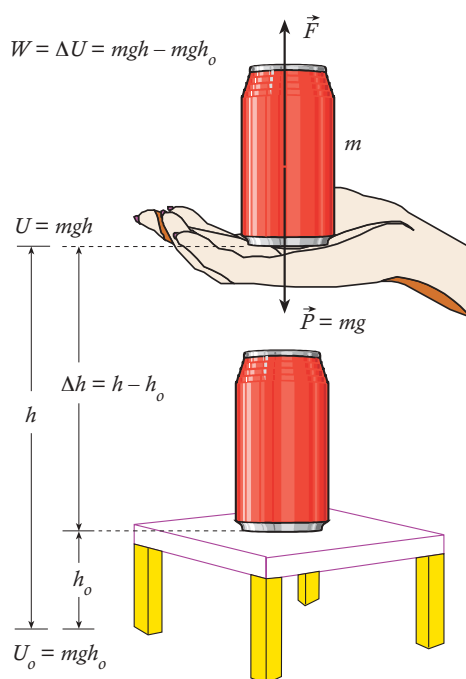


Fig. 4.1 El trabajo realizado por la fuerza de magnitud F es igual al cambio de energía potencial gravitacional

Al levantar el envase una altura h , con respecto al suelo, realizamos un trabajo. Este trabajo será positivo, ya que la dirección de nuestra fuerza está en la misma dirección del movimiento. Desde el punto de vista de la fuerza de la gravedad, ésta realiza un trabajo de igual magnitud que el realizado por la fuerza externa, pero de signo contrario (negativo), puesto que la dirección de esta fuerza es contraria a la dirección del movimiento.

Luego que levantamos el envase sobre la mesa, si por cualquier circunstancia el mismo cae al piso, puede realizar un trabajo, empujando o aplastando algo que encuentre en su línea de caída. Esto quiere decir que, estando el envase por encima la mesa, tiene el potencial de realizar un trabajo. Este potencial le ha sido transferido por el trabajo realizado sobre el envase al levantarlo. En estas condiciones, se dice que el envase tiene una *energía potencial*. Si el envase cae, desarrolla su energía potencial y, como su movimiento hacia abajo es debido a la acción de la fuerza gravitatoria, se dice que esta energía es una *energía potencial gravitatoria*.

Cuando un cuerpo se encuentra en una posición elevada, h , respecto a un punto tomado como referencia, en este caso el piso donde descansa la mesa, el cuerpo tiene una energía potencial en ese punto, la cual le ha sido transferida por el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para llevar el cuerpo a ese punto. Esta energía potencial será tanto mayor cuanto mayor sea la altura. Si en esta posición se suelta el cuerpo, la altura irá disminuyendo, a medida que el mismo se desplaza hacia abajo, por lo cual su energía potencial irá también disminuyendo en cada punto de su trayectoria, hasta hacerse cero al llegar al suelo.

Es oportuno decir aquí que, desde el momento que el cuerpo inicia su caída, éste adquiere una velocidad por la acción de la fuerza gravitatoria, con lo cual, en cada punto de su trayectoria, tendrá una energía cinética equivalente a la disminución de la energía potencial durante la caída. Es decir, la energía potencial se va transformando en energía cinética en cada punto del recorrido. Al llegar al suelo, el envase tendrá su máxima energía cinética y su energía potencial será cero. Como ya sabemos también, esta energía cinética es exactamente igual al valor del trabajo empleado para llevar el envase a la posición h .

De acuerdo a la fig 4.1, el trabajo realizado por la fuerza externa al levantar el envase es igual al incremento de la energía potencial gravitatoria:

$$W_F = \Delta U = U - U_o = mgh - mgh_o \quad (4.1)$$

Como $h > h_o$, el trabajo realizado por la fuerza externa, en contra de la fuerza de gravedad, incrementa la energía potencial gravitatoria del envase. En el proceso de levantar el envase, la fuerza de gravedad también realiza un trabajo, que como hemos dicho es negativo con respecto a W_F :

$$W_g = -\Delta U = -(U - U_o) = mg(h_o - h) \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) indica que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo es igual a la energía potencial inicial menos la energía potencial final. De esta ecuación, podemos deducir que el trabajo, W_g , realizado por la fuerza gravitacional, en ausencia de fricción, depende sólo de las coordenadas inicial y final del cuerpo, siendo, por lo tanto, independiente de la trayectoria que siga dicho cuerpo al cambiar de posición.

La unidad de medida de la energía potencial es la misma que la unidad de trabajo, el *julio*. La energía potencial es un escalar al igual que el trabajo y la energía cinética.

Es relevante mencionar que para calcular la energía potencial se asume un nivel de referencia, con respecto al cual se efectúan todas las mediciones. Ese nivel de referencia es completamente arbitrario y, a menudo, se toma la superficie terrestre como punto de energía potencial gravitatoria cero, con respecto

al cual se efectúan el resto de las mediciones.

De lo dicho antes, se desprende que la altura para el cálculo de la energía potencial puede ser medida desde cualquier punto o nivel arbitrario. Normalmente, por comodidad, se elige como nivel de referencia el punto más bajo donde puede caer el cuerpo. En este punto $h = 0$ y, por lo tanto, la energía potencial en este punto de referencia será cero. Lo anterior puede hacerse en base a que sólo se pueden medir cambios en la energía potencial gravitatoria y no la energía absoluta; esto es, un cuerpo a una determinada altura en relación, digamos, al suelo, tendrá una cantidad de energía potencial y a otra altura tendrá otra cantidad de esta energía; de tal manera que para poder medir dichos cambios, debemos definir *un nivel de referencia al que le asignemos una energía potencial cero*. También, en base al nivel que se elija con energía potencial cero, la energía potencial gravitatoria puede ser positiva o negativa.

Finalmente, recordemos que las fuerzas que realizan un trabajo cuyo valor no depende de la trayectoria, sino de sus coordenadas inicial y final se denominan *fuerzas conservativas*. La fuerza gravitacional es una fuerza conservativa.

Veamos cómo podemos extender los conocimientos anteriores al caso de la *energía potencial eléctrica*. Para ello, consideremos un campo eléctrico, cuya configuración se muestra en la fig. 4.2. El punto A se encuentra dentro del campo eléctrico creado por el cuerpo C. Consideremos, igualmente, que podemos transportar una carga desde un punto cualquiera a otro punto dentro del campo. Si la carga a

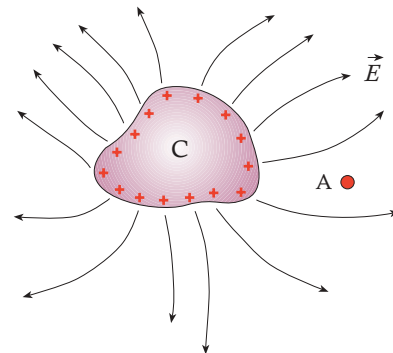


Fig. 4.2 Se realiza trabajo al desplazar una carga desde un punto cualquiera al punto A dentro del campo eléctrico.

transportar se encuentra a una distancia infinita del cuerpo C que crea el campo, la fuerza sobre ella es igual a cero. Si dicha carga se traslada desde una distancia muy lejana hasta el punto A, dos cosas podrían tener lugar:

- La carga es positiva: se produce una fuerza de repulsión sobre la misma, que es necesario compensar para situarla en A. En este caso, una fuerza externa tiene que realizar un trabajo (gastar energía) para llevar la carga hasta el punto A.
- La carga es negativa: el campo produce un movimiento que acerca la carga al cuerpo C y, bajo estas condiciones, es el campo el que hace el trabajo y proporciona la energía necesaria para trasladar la carga al punto A.

Cualquiera sea el caso, la conclusión más importante es que *se produce un cambio de energía del sistema campo - carga al transportar la carga desde el infinito hasta el punto A.*

Llamaremos *potencial de un punto* dentro de un campo al trabajo realizado cuando se lleva la unidad positiva de carga, sin aceleración, desde un punto muy alejado (infinito) hasta otro punto dentro del campo.

Hay que enfatizar que la anterior definición de potencial toma como referencia el infinito, donde se supone la ausencia de interacción con el campo. Observa, además, que *el potencial será positivo si es necesario realizar un trabajo (agente externo) para trasladar la carga y será negativo si es el campo el que realiza el trabajo.*

De acuerdo a lo descrito anteriormente, un objeto cargado puede adquirir o tener una energía potencial en virtud de su ubicación dentro de un campo eléctrico. Consideremos una carga negativa que se encuentra dentro del campo de una esfera con carga positiva tal como se presenta en la fig. 4.3. La situación es similar a la de una masa m en el campo gravitacional de la Tierra. El trabajo realizado por un agente externo para llevar la carga desde un punto inicial, A, hasta un punto final, B, balanceando la

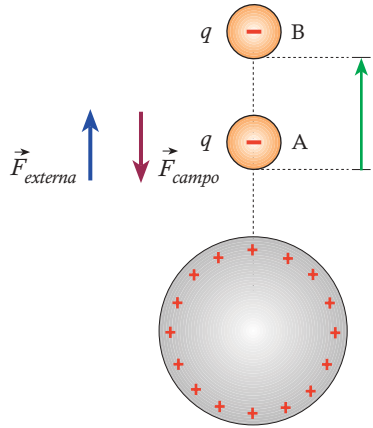


Fig. 4.3 El trabajo realizado por un agente externo para mover la carga q desde A hasta B es igual al incremento de la energía potencial eléctrica de la carga.

fuerza eléctrica, es igual al incremento de energía potencial eléctrica del sistema campo - carga. El trabajo realizado, equivalente a la variación de energía potencial de la carga q , está dado por:

$$W_{\text{externo}} = \vec{F}_{\text{externa}} \cdot \vec{d} = F_{\text{externa}} \cdot d \cos \theta \quad (4.3)$$

Como el ángulo entre la fuerza externa y el vector desplazamiento es 0° , podemos escribir:

$$W_{\text{externo}} = F_{\text{externa}} \cdot d \quad (4.4)$$

Dado que este trabajo es equivalente a la energía ganada por la carga, tenemos:

$$W_{\text{externo}} = \Delta U = U_B - U_A = F_{\text{externa}} \cdot d \quad (4.5)$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica, debido al campo, puede expresarse como:

$$W_{\text{campo}} = \vec{F}_{\text{campo}} \cdot \vec{d} = F_{\text{campo}} \cdot d \cos \theta \quad (4.6)$$

Según la fig. 4.3, el ángulo entre la fuerza del campo y el vector desplazamiento es de 180° , por lo que la expresión anterior nos queda de la forma siguiente:

$$W_{\text{campo}} = F_{\text{campo}} \cdot d \cos 180^\circ = -F_{\text{campo}} \cdot d$$

Puesto que la fuerza aplicada balancea a la del campo (observa que bajo esta condición la carga se mueve sin aceleración), $F_{\text{campo}} = F_{\text{externa}}$ y (4.7) puede escribirse como:

$$W_{\text{campo}} = -F_{\text{externa}} \cdot d \quad (4.7)$$

Si comparamos las relaciones (4.4) y (4.7), podemos escribir:

$$W_{\text{externo}} = - W_{\text{campo}} \quad (4.8)$$

De la relación (4.5) llegamos a la conclusión:

$$\Delta U = U_B - U_A = W_{\text{externo}} = - W_{\text{campo}} \quad (4.9)$$

Es decir, *el incremento de la energía potencial de la carga es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica, cambiado de signo*. La anterior relación puede escribirse como:

$$W_{\text{campo}} = W_{AB} = - \Delta U = U_A - U_B \quad (4.10)$$

lo que significa que el trabajo efectuado por el campo eléctrico es igual al decremento de energía entre los puntos A y B ($U_A < U_B$).

Si la carga q se suelta en la posición B, se acelerará y «caerá» hacia la esfera cargada, en virtud de la energía potencial eléctrica adquirida por la carga al moverse desde A hasta B. Esta energía potencial se transformará en energía cinética que acelerará la carga hacia la esfera.

Podemos deducir de los planteamientos recién estudiados que *la carga negativa, de ser libre de moverse, tiende a trasladarse a puntos de menor energía potencial*. Esto es similar a la caída libre de los cuerpos, en la cual una masa, al disminuir su altura, se desplaza hacia zonas de más bajo potencial gravitatorio.

Aun cuando el concepto de energía potencial eléctrica esta íntimamente relacionado con el de energía potencial gravitatoria, existe una diferencia notable: en el caso de dos masas (por ejemplo, la Tierra y un objeto que está cercano a ella) la fuerza mutua siempre es de atracción, mientras que en el caso de cuerpos cargados, la fuerza puede ser de atracción (cargas de signo contrario) o de repulsión (cargas de igual signo).

4.2 ENERGÍA POTENCIAL CUANDO EL CAMPO ELÉCTRICO ES UNIFORME

Veamos la relación entre la energía potencial eléctrica y las fuerzas derivadas de la presencia de un campo. Para ello, consideremos un campo eléctrico uniforme, como el mostrado en la fig. 4.4.

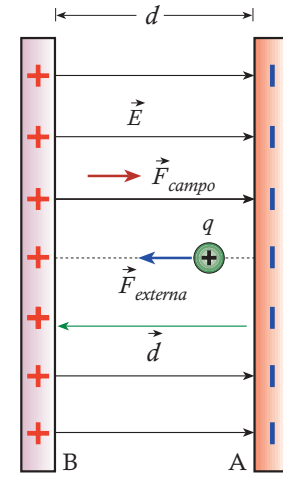


Fig. 4.4 Las láminas paralelas cargadas generan un campo uniforme en el cual se mueve una carga positiva $+q$.

Una fuerza externa, F_{externa} , que trate de mover la carga $+q$ entre las placas A y B, sin aceleración, debe compensar la fuerza ejercida por el campo eléctrico, F_{campo} . El trabajo efectuado por la fuerza externa es:

$$W_{\text{externo}} = W_{AB} = \Delta U = U_B - U_A \quad (4.11)$$

La fuerza eléctrica realiza un trabajo dado por:

$$W_{\text{campo}} = \vec{F}_{\text{campo}} \cdot \vec{d} = F_{\text{campo}} \cdot d \cos 180^\circ$$

$$W_{\text{campo}} = -F_{\text{campo}} \cdot d \quad (4.12)$$

Como la fuerza del campo está relacionada con la intensidad de campo por la expresión $F_{\text{campo}} = qE$ y, de acuerdo a (4.9), $W_{\text{externo}} = - W_{\text{campo}}$, podemos combinar (4.11) y (4.12) para obtener:

$$\Delta U = U_B - U_A = - W_{\text{campo}} = -(-qEd) = qEd$$

$$U_B - U_A = qEd \quad (4.13)$$

relación que demuestra que el incremento de energía potencial de la carga al pasar del punto A al punto B es positivo y proporcional a la carga, a la intensidad del campo y a la distancia entre las láminas. Si la carga q se soltara entre las láminas, el campo trataría de llevarla hacia el punto A de la lámina negativa que se encuentra a menor potencial. Esto corrobora lo que afirmamos anteriormente: *si la carga se moviera libremente, tendería a ir hacia puntos de menor energía potencial*.

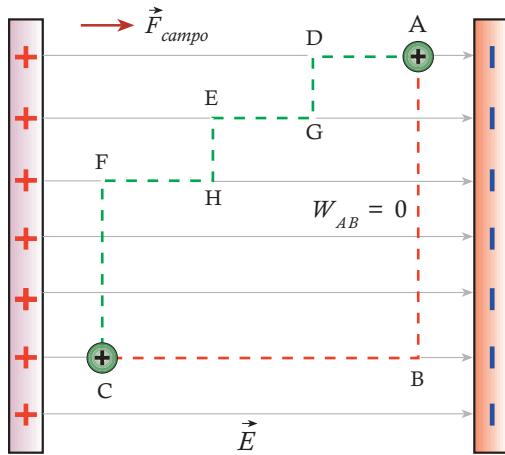


Fig. 4.5 La fuerza eléctrica es conservativa: el trabajo para llevar una carga desde A hasta C no depende de la trayectoria sino de los puntos finales A y C.

4.3 LA FUERZA ELÉCTRICA ES UNA FUERZA CONSERVATIVA

Hemos mencionado que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. Esto significa que el trabajo realizado por la misma no depende de la trayectoria seguida durante la realización del trabajo, sino que este es función únicamente de los puntos inicial y final de la trayectoria. Esta propiedad de la fuerza gravitatoria es extensiva a la fuerza debida a un campo eléctrico como puede comprobarse haciendo alusión a la fig. 4.5, donde, nuevamente, se presenta un campo uniforme como el que existe entre dos láminas paralelas infinitas.

La carga positiva podría ser obligada a moverse desde A hasta C por dos caminos diferentes: ABC, y ADGEHFC. Recordemos que, de acuerdo a la relación (4.8) $W_{\text{externo}} = -W_{\text{campo}} = qEd$ y veamos cuál es el trabajo efectuado en cada caso:

Trayectoria ABC: en el tramo AB la fuerza del campo y el desplazamiento forman un ángulo de 90° y, por tanto el trabajo efectuado es nulo. En el tramo BC el trabajo está dado por $W_{BC} = qEd_{BC}$, de manera que el trabajo total realizado por a lo largo de este camino es:

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} = 0 + qEd_{BC} = qEd_{BC} \quad (4.14)$$

Trayectoria ADGEHFC: en los tramos perpendiculares al campo (DG, EH, FC) no se efectúa trabajo alguno para mover la carga, ya que $\theta = 90^\circ$. En los tramos AD, GE y HF el trabajo está dado por:

$$W_{AD} + W_{GE} + W_{HF} = qE(d_{AD} + d_{GE} + d_{HF})$$

Pero $d_{AD} + d_{GE} + d_{HF} = d_{BC}$, por lo que la relación anterior puede expresarse como:

$$W_{AD} + W_{GE} + W_{HF} = qEd_{BC} \quad (4.15)$$

Finalmente, el trabajo realizado para ir desde A hasta C siguiendo la trayectoria ADGEHFC es:

$$W_{AC} = qEd_{BC} \quad (4.16)$$

resultado que es igual al trabajo efectuado al seguir la trayectoria ABC.

Lo anterior nos lleva a afirmar lo siguiente:

La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y, por tanto, el trabajo realizado al trasladar una carga entre dos puntos de un campo eléctrico es independiente de la trayectoria que se siga.

Ejemplo 4.1

Las placas paralelas separadas 10 cm de la fig. 4.6 crean un campo de magnitud 20.000 N/C. Un agujero en las placas permite el paso de partículas cargadas. Si al entrar al agujero la energía cinética de las partículas es de $3,6 \cdot 10^{-16}$ J, determina la velocidad de las mismas al salir, si se trata: **a)** De protones, **b)** De electrones.

Solución

a) El caso de protones se muestra en la fig. 4.6(a). Por tratarse de cargas positivas, las partículas son frenadas a medida que avanzan en el campo, el cual tiene dirección contraria a la del desplazamiento. Es decir, la energía cinética de los protones disminuye en favor de un incremento en la energía potencial.

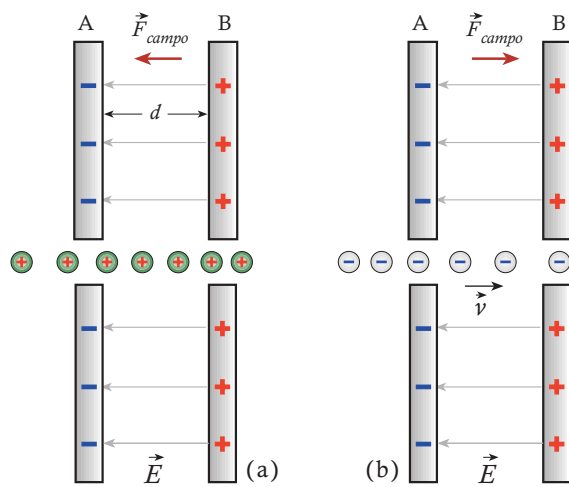


Fig. 4.6 Ejemplo 4.1: movimiento de partículas en un campo eléctrico uniforme creado por dos láminas paralelas. **a)** Cuando las partículas son protones, el campo frena su desplazamiento, la energía cinética disminuye y la energía potencial aumenta. **b)** Cuando las partículas son electrones, el campo las acelera, la energía cinética aumenta y la energía potencial disminuye.

El incremento en energía potencial está dado por la relación:

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -W_{\text{campo}} = -(-qEd) = qEd$$

Sustituyendo los valores de q , E y d :

$$\Delta U_{AB} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Puesto que la ganancia en energía potencial es igual a la pérdida de energía cinética (principio de conservación de la energía), tendremos:

$$\Delta E_{\text{cinética}} = -3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

La energía cinética final de los protones, al salir de las láminas es:

$$E_{\text{cinética}} = 3,6 \cdot 10^{-16} - 3,2 \cdot 10^{-16} = 0,4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Como la masa de un protón es igual a $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, la velocidad de los protones será:

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2E_{\text{cinética}}}{m_p}}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-16}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 0,219 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b) Si las partículas cargadas son electrones, éstos son acelerados en el campo eléctrico, de manera que se incrementa su energía cinética y disminuye su energía potencial. La disminución de energía potencial es:

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -W_{\text{campo}} = -qEd$$

Observa que el trabajo realizado por el campo es positivo, porque el desplazamiento del electrón tiene la misma dirección del campo. La disminución de la energía potencial está dada por:

$$\Delta U_{AB} = -3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

La anterior disminución de la energía potencial corresponde exactamente al incremento de energía cinética de los electrones; por tanto:

$$\Delta E_{\text{cinética}} = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

La energía cinética final de los electrones al salir de las placas está dada por la energía cinética inicial más el incremento de energía cinética:

$$E_{\text{cinética}} = 3,6 \cdot 10^{-16} + 3,2 \cdot 10^{-16} = 6,8 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Tomando en cuenta que la masa de un electrón es $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, la velocidad de los mismos a la salida de las placas es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_{\text{cinética}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,8 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,386 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

4.4 DIFERENCIA DE POTENCIAL

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica al desplazar una carga de prueba q dentro de un campo eléctrico está dado por:

$$W_{\text{campo}} = q\vec{E} \cdot \vec{d}$$

Por definición, el incremento de la energía potencial del sistema se expresa como:

$$\Delta U = U_B - U_A = -q\vec{E} \cdot \vec{d} \quad (4.17)$$

En general, la diferencia de potencial, V_{AB} , entre dos puntos, A y B, de un campo eléctrico, se define como el cambio de energía potencial dividido por la carga de prueba q :

$$V_{AB} = V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q} = -\vec{E} \cdot \vec{d} \quad (4.18)$$

Como puede deducirse de la expresión anterior, la diferencia de potencial es una cantidad escalar, ya que el producto vectorial $\vec{E} \cdot \vec{d}$ es, también, una cantidad escalar. Ha de enfatizarse que (4.18) define solamente diferencias de potencial. Esto requiere la existencia de una referencia (V_A) que a menudo se toma como el potencial en el infinito, al cual se le asigna el valor cero ($V_\infty = 0$). Otras veces, la selección de la referencia se hace en cualquier punto conveniente, de acuerdo con el sistema que se esté analizando.

Según la relación (4.18), la diferencia de potencial está expresada en energía por unidad de carga. De allí que la unidad fundamental en el sistema internacional (SI) sea el joule/coulomb. A esta unidad se le denomina *voltio*, se le designa por la letra **V** y su expresión es:

$$1 \text{ voltio} = 1 \text{ joule / coulomb} \Rightarrow 1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

De acuerdo a la expresión anterior, se debe hacer un trabajo de 1 joule para trasladar una carga de 1 coulomb, a través de una diferencia de potencial de 1 voltio.

El voltio se relaciona, a menudo, con otra unidad de trabajo denominada *electrón-voltio* (designada por eV), la cual se define como el incremento de energía de un electrón al ser sometido a una diferencia de potencial de 1 V. Para determinar la equivalencia entre 1 eV y joules, usemos (4.18) con $q =$ la carga de un electrón $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulombs y $V_{AB} = 1$ voltio:

$$\Delta U = q \cdot V_{AB} = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Luego:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (4.19)$$

El electrón-voltio proporciona una manera más compacta de expresar la energía en ciertos procesos a nivel de física atómica. Por ejemplo, la energía necesaria para separar un electrón de un átomo neutro está, de acuerdo a la sustancia de la cual se trate, entre 1 y 20 eV.

A la diferencia de potencial se le denomina, en la práctica, *voltaje* o *tensión eléctrica*, términos que son usados ampliamente en nuestra vida cotidiana. Así, decimos que el voltaje en los equipos electrodomésticos, tales como ventiladores, neveras, televisores, etc, funcionan con un voltaje de 110 voltios de corriente alterna. Las baterías de nuestros vehículos son dispositivos que poseen un voltaje entre sus bornes de 12 V de corriente continua o directa.

Ejemplo 4.2

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b creada por la línea infinita de la fig. 4.7 está dada por la expresión:

$$V_{ab} = 2k\lambda \ln \frac{b}{a}$$

donde b y a son las distancias de dos puntos alejados de la línea ($b > a$) y λ es la densidad lineal de carga.

a) Si $\lambda = 2 \mu\text{C/m}$, $a = 5 \text{ cm}$ y $b = 20 \text{ cm}$, determina la diferencia de potencial entre los puntos A y D. b) ¿Qué trabajo realiza el campo para llevar una carga de $1 \mu\text{C}$ desde A hasta D si se sigue la trayectoria A–D? c) ¿Qué trabajo realiza el campo para llevar la misma carga anterior desde A hasta D si se sigue la trayectoria A–B–C–D?

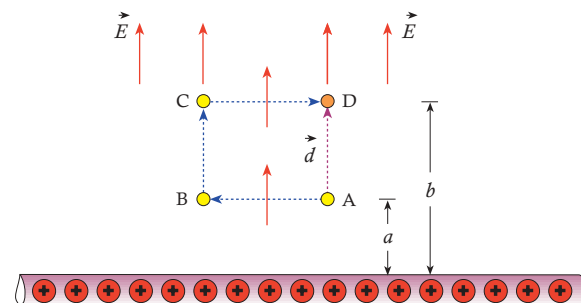


Fig. 4.7 Ejemplo 4.2.

Solución

a) De acuerdo a la relación dada, tenemos:

$$V_{ab} = 2k\lambda \ln \frac{b}{a} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \ln \frac{20}{5}$$

$$V_{ab} = 4,99 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b) Cuando la partícula se mueve desde A hasta D siguiendo la trayectoria A-D, el vector desplazamiento $\vec{d}$, es paralelo al campo y, por tanto, este último efectúa un trabajo dado por:

$$W_{AB} = qV_{AB} = 10^{-6} \cdot 4,99 \cdot 10^4 = 4,99 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

c) En los segmentos AB y CD, el campo no realiza trabajo alguno, ya que el desplazamiento es perpendicular al vector campo eléctrico. Sólo en el trayecto B-C se produce trabajo, cuyo valor es igual al calculado anteriormente en la parte b.

a) Al ser soltada, la carga varía su velocidad, aumentando su energía cinética. El trabajo realizado por el campo sobre la carga desde A hasta B es:

$$W_{AB} = F_{\text{campo}} \cdot d = qEd$$

Sustituyendo valores, obtenemos:

$$W_{AB} = 10^{-6} \cdot 5.000 \cdot 5 = 0,025 \text{ J}$$

El incremento de energía potencial entre los puntos A y B está dado por:

$$\Delta U_{AB} = -W_{\text{campo}} = -0,025 \text{ J}$$

valor que establece una disminución de la energía potencial de la carga. Esta pérdida de energía potencial, es equivalente a una ganancia de energía cinética de la carga. Como la energía cinética inicial es nula, la energía cinética final de la carga es:

$$E_{\text{cinética}} = 0,025 \text{ J}$$

b) Por definición de diferencia de potencial:

$$V_{AB} = V_{x=5} - V_{x=0} = \frac{\Delta U_{AB}}{q} = \frac{-0,025}{10^{-6}} = -25 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El valor negativo indica que el punto en $x = 5$ tiene un potencial menor que el punto en $x = 0$.

Ejemplo 4.3

Se deja libre una carga de $1 \mu\text{C}$ en un campo eléctrico uniforme dirigido en la dirección X de intensidad 5.000 N/C . Si la carga se suelta en el origen: a) ¿Cuál es su energía cinética cuando se encuentra en $x = 5 \text{ m}$? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_{x=5} - V_{x=0}$?

Solución

En la fig. 4.8 se muestra la configuración correspondiente al problema.

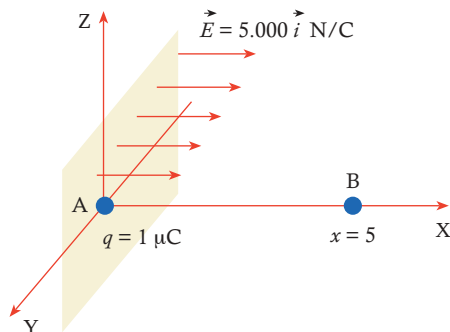


Fig. 4.8 Problema 4.3.

4.5 DIFERENCIA DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Un campo eléctrico uniforme es aquel cuya magnitud y dirección permanecen constantes en la región del espacio donde está presente. Un caso típico, y que ya hemos estudiado, es el campo entre dos láminas paralelas cargadas, tal como se presenta en la fig. 4.9. El trabajo realizado por el campo uniforme para trasladar la carga positiva, q , desde la lámina A hasta la B está dado por $W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{d}$, donde la fuerza F es constante, por ser función del campo uniforme E . Entonces:

$$W_{\text{campo}} = W_{AB} = \vec{F}_{\text{campo}} \cdot \vec{d} = qEd \quad (4.20)$$

Por definición, la diferencia de potencial es:

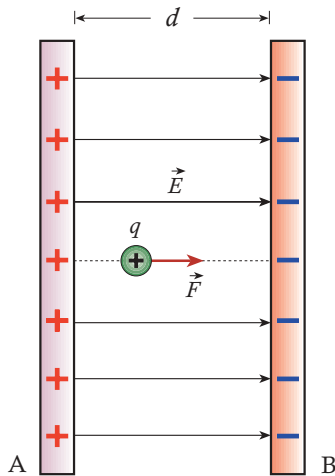


Fig. 4.9 Configuración para determinar la diferencia de potencial entre dos láminas paralelas.

$$V_{AB} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_{AB}}{q} = \frac{-W_{\text{campo}}}{q} = -Ed \quad (4.21)$$

Lo que indica que la diferencia de potencial es proporcional al valor del campo uniforme y a la distancia entre las mismas. Es conveniente notar que la expresión (4.21) da el valor de la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, dentro de un campo uniforme. Mediante (4.21) podemos determinar la magnitud del campo, medido el valor de la diferencia de potencial:

$$E = \frac{V_{AB}}{d} \quad (4.22)$$

Asimismo, la variación de energía potencial entre dos puntos de un campo eléctrico puede ser calculado usando la relación (4.21):

$$\Delta U_{AB} = qV_{AB} \quad (4.23)$$

Usualmente, la medición de la diferencia de potencial se hace utilizando instrumentos llamados voltímetros, lo que permite determinar el valor de E , mediante la relación (4.22).

Observa que, de acuerdo a la relación (4.22), el campo eléctrico se puede expresar en unidades de *voltios por metro* (V/m). Esto significa que la unidad voltios por metro (V/m) es equivalente a la de newtons por coulomb (N/C).

Ejemplo 4.4

La diferencia de potencial entre las láminas conductoras de la fig. 4.10, de cargas iguales y opuestas, separadas 10 cm, es de 1.000 voltios. **a)** ¿Cuál es el campo eléctrico entre las láminas? **b)** Si se deja en reposo un electrón en la lámina negativa, ¿qué trabajo realiza el campo para llevar el electrón hasta la lámina positiva? **c)** ¿Qué variación experimenta el electrón en su energía potencial? **d)** ¿Cuál es el cambio de energía cinética del electrón?

Solución

a) De acuerdo a la relación (4.22):

$$E = \frac{V_{AB}}{d} = \frac{1.000 \text{ V}}{10^{-1} \text{ m}} = 10.000 \text{ V/m}$$

El campo, por estar dirigido hacia la derecha, puede expresarse vectorialmente como:

$$\vec{E} = 10.000\vec{i} \text{ V/m}$$

b) La fuerza ejercida por el campo sobre el electrón puede calcularse mediante la relación $\vec{F} = q\vec{E}$:

$$\vec{F}_{\text{campo}} = q\vec{E} = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4 \vec{i} = -3,2 \cdot 10^{-15} \vec{i} \text{ N}$$

Es preciso observar que el vector $-\vec{i}$ del resultado anterior indica que la fuerza sobre el electrón tiene dirección opuesta al campo y está, por tanto, dirigida hacia la izquierda. El trabajo realizado por el campo está dado por la expresión:

$$W_{BA} = \vec{F}_{\text{campo}} \cdot \vec{d}$$

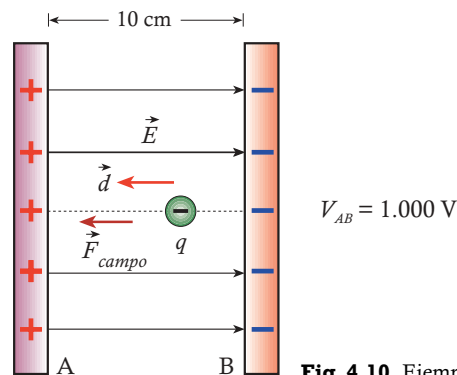


Fig. 4.10 Ejemplo 4.4.

donde $\vec{d}$ es el vector desplazamiento que está dirigido hacia la izquierda y con $d = 0,1$ m puede expresarse como:

$$\vec{d} = d(-\vec{i}) = -d\vec{i} = -0,1\vec{i} \text{ m}$$

Sustituyendo los valores de $\vec{F}_{\text{campo}}$ y $\vec{d}$ en la relación correspondiente al trabajo:

$$W_{BA} = (-3,2 \cdot 10^{-15} \vec{i}) \cdot (-0,1\vec{i}) = 0,32 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

c) De acuerdo a la relación (4.9):

$$\Delta U_{BA} = U_A - U_B = -W_{BA} = -3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

lo cual indica que el electrón pierde energía potencial al pasar de la lámina B hasta la lámina A.

d) La pérdida de energía potencial del electrón se convierte en ganancia de energía cinética. De acuerdo al principio de conservación de la energía:

$$\Delta U_{BA} + \Delta E_{\text{cinética}} = 0$$

De donde:

$$\Delta E_{\text{cinética}} = -\Delta U_{BA} = -(-3,2 \cdot 10^{-16}) = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Ejemplo 4.5

Un deuterón es un núcleo de un átomo que contiene un protón y un neutrón. Si el campo eléctrico entre dos placas paralelas separadas una distancia de 2 cm es uniforme e igual a 25.000 N/C , determina: a) La diferencia de potencial entre las placas. b) La energía cinética que gana un deuterón al ser acelerado entre las dos placas. La fig. 4.11 ilustra la configuración.

Solución

a) El campo eléctrico se puede expresar vectorialmente como:

$$\vec{E} = 25 \cdot 10^3 \vec{i}$$

De acuerdo con la relación (4.18):

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

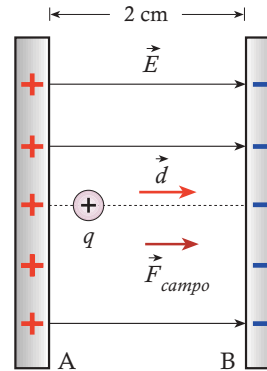


Fig. 4.11 Ejemplo 4.45.

El vector desplazamiento puede escribirse como:

$$\vec{d} = 2 \cdot 10^{-2} \vec{i}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$V_{AB} = -(25 \cdot 10^3 \vec{i}) \cdot (2 \cdot 10^{-2} \vec{i}) = -500 \text{ V}$$

Como $V_{AB} = V_B - V_A$, el signo negativo significa que el potencial de la lámina B es menor que el de la lámina A ($V_B < V_A$).

b) Al «caer» hacia la lámina negativa, el deuterón pierde energía potencial. Esta pérdida está relacionada con la diferencia de potencial mediante la relación (4.23):

$$\Delta U_{AB} = qV_{AB} = (1,6 \cdot 10^{-19})(-500) = -800 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Lo que pierde el deuterón en energía potencial, lo gana en energía cinética:

$$\Delta E_{\text{cinética}} = 800 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

4.6 POTENCIAL ABSOLUTO

En muchas ocasiones es usual hablar del *potencial en un punto*, al describir las características eléctricas de una determinada región del espacio, omitiendo la referencia con respecto a la cual se mide el potencial. En este caso, se habla de *potencial absoluto*, tal como fue definido en la sección 4.1. En realidad, no existe un potencial absoluto, ya que siempre habrá un punto que sirva de referencia para efectuar la medición. En otras palabras, es la diferencia de potencial entre

dos puntos el término correcto para señalar la distinción entre sus niveles de energía potencial eléctrica. Por ello, debemos tener presente que cuando se habla de potencial en un punto, estamos haciendo alusión a un punto de referencia que, usualmente, no se menciona. Ese punto de referencia se toma convenientemente, de acuerdo a la configuración de cargas que se tenga y puede variar de un caso a otro. Algunas veces se toma como referencia un punto al infinito y, en muchas aplicaciones prácticas, se toma como nivel de referencia aquellos puntos que faciliten el análisis o la solución de un determinado problema. Por ejemplo, en los equipos electrónicos se suele tomar el chasis de los mismos como punto con respecto al cual se miden todos los voltajes de los circuitos. Otras veces, se refieren todos los voltajes a puntos sobre la superficie terrestre o conectados a la misma. En este caso se dice que la referencia es la «tierra», a la cual se le asigna, arbitrariamente, un potencial igual a cero. Consideremos, para afianzar lo aquí descrito, dos placas metálicas como las mostradas en la fig. 4.12.

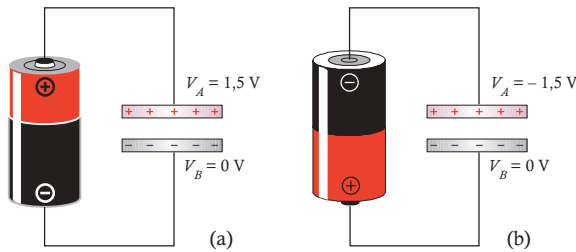


Fig. 4.12 El potencial siempre se mide respecto a un punto tomado como referencia.

En la parte (a) de la figura, una pila de 1,5 V se aplica a la placa A. Se dice, entonces, que el potencial de esa placa es igual a 1,5 V con respecto al potencial de la placa B, cuyo potencial se ha tomado arbitrariamente como cero. Observa que el potencial del polo negativo de la pila es también igual al potencial de referencia (cero voltios). Si invertimos la pila, como se muestra en la fig. 4.2 (b), el potencial de la placa A es, ahora, igual a $-1,5$ voltios con respecto al potencial de la placa B, conectada al polo positivo de la pila y tomada como referencia. En este último caso, al terminal positivo de la batería se le asigna potencial cero. Entonces, tanto el terminal positivo de la batería como el negativo, pueden ser tomados como referencia con potencial igual a cero.

4.7 POTENCIAL CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL

A menudo, en los estudios de los fenómenos electromagnéticos, se hace referencia a campos eléctricos y potenciales creados por cargas puntuales. Aparte de la existencia física de dichas cargas, la razón es simple: los cuerpos complejos cargados pueden considerarse constituidos por un número infinito de cargas muy pequeñas (puntuales) y la determinación del campo y el potencial debido a su presencia es la suma, bien sea vectorial o escalar, de las contribuciones de esas cargas pequeñas.

Consideremos una carga puntual, como se muestra en la fig. 4.13, la cual crea un campo a su alrededor y tratemos de determinar la diferencia de potencial entre dos puntos A y B, situados a lo largo de una línea que pasa por la carga. La longitud AB ha sido dividida en un gran número de partes iguales (en teoría un número infinito de partes iguales) de manera que el campo existente entre dos puntos consecutivos pueda considerarse invariable. Seleccionemos los puntos 1, 2, 3 y 4, situados a lo largo de la recta y sean r_1, r_2, r_3 y r_4 las distancias al centro de la carga q . La fuerza ejercida sobre una carga de prueba situada en los puntos A, 1, 2, 3, 4 y B, por la carga q , está dada, en cada caso, por:

$$F_A = k \frac{qq_o}{r_A^2}, F_1 = k \frac{qq_o}{r_1^2}, F_2 = k \frac{qq_o}{r_2^2}, \dots, F_B = k \frac{qq_o}{r_B^2}$$

El trabajo realizado por el campo para trasladar la carga de prueba desde el punto A al punto 1 es:

$$W_{A1} = F_A \cdot (r_1 - r_A) = k \frac{qq_o}{r_A^2} \cdot (r_1 - r_A) \quad (4.24)$$

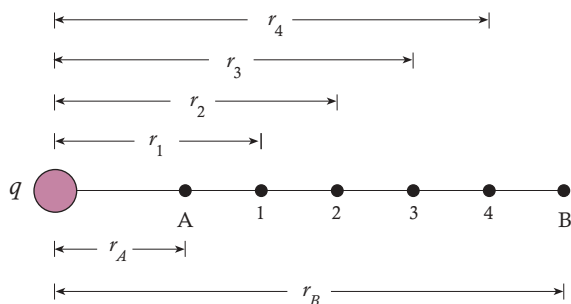


Fig. 4.13 Determinación de la diferencia de potencial entre dos puntos, debido a una carga puntual.

ya que la distancia entre el punto A y el punto 1 es $r_1 - r_A$ y la fuerza entre esos dos puntos, por estar muy próximos entre sí, puede ser considerada constante. Ahora bien, puesto que la distancia r_A es aproximadamente igual a r_1 , en lugar de r_A^2 podemos escribir $r_1 r_A$, con lo que la relación anterior nos queda como:

$$W_{A1} = \frac{kq q_o}{r_A^2} \cdot (r_1 - r_A) = \frac{kq q_o}{r_1 r_A} \cdot (r_1 - r_A) = kq_o \left(\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_1} \right)$$

Usando el mismo criterio anterior, los trabajos realizados para llevar la carga de prueba entre los puntos 1-2, 2-3, 3-4, y 4-B son:

$$W_{12} = \frac{kq q_o}{r_1^2} \cdot (r_2 - r_1) = \frac{kq q_o}{r_1 r_2} \cdot (r_2 - r_1) = kq_o \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$

$$W_{23} = \frac{kq q_o}{r_2^2} \cdot (r_3 - r_2) = \frac{kq q_o}{r_2 r_3} \cdot (r_3 - r_2) = kq_o \left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3} \right)$$

$$W_{34} = \frac{kq q_o}{r_3^2} \cdot (r_4 - r_3) = \frac{kq q_o}{r_3 r_4} \cdot (r_4 - r_3) = kq_o \left(\frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4} \right)$$

$$W_{4B} = \frac{kq q_o}{r_B^2} \cdot (r_B - r_4) = \frac{kq q_o}{r_4 r_B} \cdot (r_B - r_4) = kq_o \left(\frac{q}{r_4} - \frac{q}{r_B} \right)$$

Sumando las cinco expresiones obtenidas, determinamos el trabajo total para trasladar la carga q_o desde A hasta B:

$$W_{AB} = kq_o \left[\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3} + \frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4} + \frac{q}{r_4} - \frac{q}{r_B} \right]$$

Simplificando la relación anterior:

$$W_{AB} = kq_o \left[\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B} \right]$$

De acuerdo a (4.18), el incremento de energía potencial del sistema es:

$$\Delta U = -W_{AB} = -kq_o \left[\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B} \right] = kq_o \left[\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A} \right]$$

Por definición, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es igual a $\Delta U/q_o$. Entonces, usando la relación anterior:

$$V_{AB} = k \left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A} \right) \quad (4.25)$$

Como $V_{AB} = V_B - V_A$, de (4.25) obtenemos:

$$V_B - V_A = k \left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A} \right) \quad (4.26)$$

Con el fin de definir el potencial en el punto A, tomamos como referencia un punto B, ubicado en el infinito ($r_B = \infty$), para el cual el potencial es igual a cero. Si sustituimos estos valores con $r_A = r$ en (4.26):

$$V_B - V_A = k \left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A} \right) \Rightarrow 0 - V_A = k \left(\frac{q}{\infty} - \frac{q}{r_A} \right)$$

$$V_A = k \frac{q}{r_A}$$

relación que se puede escribir de forma general como:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (4.27)$$

Lo que indica que el potencial en un punto cualquiera, A, situado a una distancia r de una carga puntual q , es directamente proporcional al valor de dicha carga e inversamente proporcional a la distancia al punto. El potencial será positivo si la carga q es positiva y será negativo si q es negativa. Si en lugar de una carga, se tiene un conjunto de cargas, el potencial en un punto se determina sumando las contribuciones de cada una de las cargas que crean el campo. En este caso, se utiliza la siguiente fórmula para la determinación del potencial de n cargas:

$$V = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i} \quad (4.28)$$

Ejemplo 4.6

a) Determina el potencial eléctrico en el punto P del conjunto de cargas mostrado en la fig. 4.14. b) ¿Qué trabajo se realiza para llevar una carga de $5 \mu\text{C}$ desde el infinito hasta el punto P?

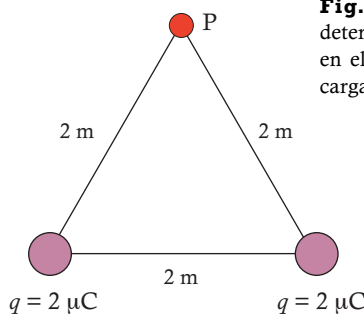


Fig. 4.14 Ejemplo 4.6: determinación del potencial en el punto P, debido a las cargas q .

Solución

a) De acuerdo a la relación (4.28):

$$V = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2} \right)$$

$$V = 18.000 \text{ voltios}$$

b) Según la definición de potencial:

$$V = \frac{\Delta U}{q_o} \Rightarrow \Delta U = -W_{AB} = q_o V \Rightarrow W_{AB} = -q_o V$$

La expresión anterior es el trabajo que efectuaría el campo para traer una carga positiva desde el infinito hasta el punto P. El trabajo de un agente externo es opuesto al resultado anterior y tendremos:

$$W_{AB} = q_o V = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 10^3 = 90 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ejemplo 4.7

Tres cargas se colocan en los vértices del rectángulo mostrado en la fig. 4.15. Si las cargas en los puntos A, B y C son $q_A = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $q_B = -8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ y $q_C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, determina: a) Los potenciales en los puntos M y N. b) El trabajo requerido por un agente externo para trasladar una carga de $3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ desde el punto M hasta el punto N.

Solución

a) Las distancias AM , BM y CM son iguales a:

$$AM = BM = CM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

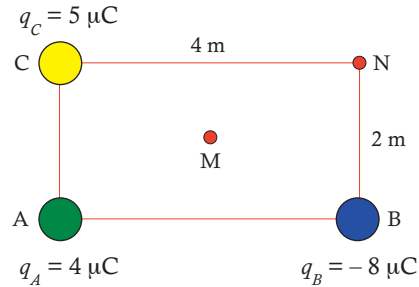


Fig. 4.15 Configuración de cargas para el ejemplo 4.7.

Los potenciales en el punto M, debidos a las cargas q_A , q_B y q_C se calculan según la relación:

$$V_{M(\text{Debido a } q_A)} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = \frac{36}{\sqrt{5}} \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{M(\text{Debido a } q_B)} = 9 \cdot 10^9 \frac{-8 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = -\frac{72}{\sqrt{5}} \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{M(\text{Debido a } q_C)} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = \frac{45}{\sqrt{5}} \cdot 10^3 \text{ V}$$

El potencial resultante en el punto M es la suma de los valores anteriores:

$$V_M = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot 10^3 = 4.024,92 \text{ V}$$

La distancia AN tiene como valor:

$$AN = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{19}$$

Los potenciales en el punto N, debido a las cargas, son:

$$V_{N(\text{Debido a } q_A)} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{19}} = 8,26 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{N(\text{Debido a } q_B)} = 9 \cdot 10^9 \frac{-8 \cdot 10^{-6}}{2} = -36 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{N(\text{Debido a } q_C)} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4} = 11,25 \cdot 10^3 \text{ V}$$

La suma de los resultados anteriores da el valor del potencial en el punto N, debido a las tres cargas:

$$V_N = (8,26 - 36 + 11,25) \cdot 10^3 = -16.490 \text{ V}$$

b) La diferencia de potencial entre los puntos M y N se puede calcular así:

$$V_{MN} = V_N - V_M = -1,25 \cdot 10^4 \text{ V}$$

De acuerdo con la definición de potencial:

$$V_{MN} = \frac{W_{MN}}{q_o} \Rightarrow W_{MN} = q_o \cdot V_{MN}$$

Sustituyendo valores:

$$W_{MN} = 3 \cdot 10^{-6} (-1,25 \cdot 10^4) = -3,75 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

El signo negativo significa que el agente externo no tiene que realizar trabajo alguno para hacer el traslado. Es el campo el que realiza el trabajo.

El trabajo realizado para llevar la carga desde el infinito hasta P es igual al incremento de energía potencial del sistema de cargas y está dado por:

$$\Delta U = q_o V = k \frac{qq_o}{r} \quad (4.29)$$

Si las dos cargas, q y q_o , hubieran estado separadas una distancia infinita, una de la otra, la relación (4.29) permite determinar la energía adquirida por el sistema de cargas, en relación a la energía potencial igual a cero, cuando las dos cargas estaban infinitamente separadas. Entonces, podemos hacer la siguiente definición:

El trabajo realizado para llevar dos cargas puntuales desde una separación infinita hasta sus posiciones finales en el espacio, es igual a la energía potencial electrostática del sistema de cargas.

4.8 SISTEMA DE CARGAS: ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

De acuerdo con lo que hemos estudiado, el potencial eléctrico en un punto está dado por $V = kq/r$ y corresponde al trabajo por unidad de carga que se debe realizar para trasladar una carga de prueba positiva, q_o , desde el infinito hasta colocarla en un punto P, situado a una distancia r de la carga q que crea el campo. El traslado debe hacerse sin aceleración (velocidad constante). Esto se ilustra en la fig. 4.16.

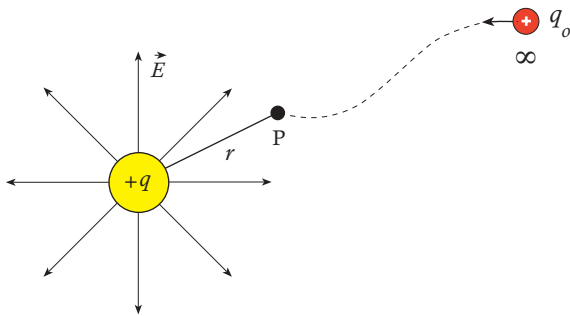


Fig. 4.16 El potencial en un punto se define como el trabajo que hay que hacer para trasladar una carga de prueba desde el infinito hasta un punto P, cercano a una carga q , sin aceleración.

Lo anterior es aplicable a un número cualquiera de cargas. Por ejemplo, para las cargas q_1 , q_2 y q_3 de la fig. 4.17, el trabajo para acercarlas desde el infinito a la posición mostrada, que es equivalente a la energía del sistema, está dado por:

$$W = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (4.30)$$

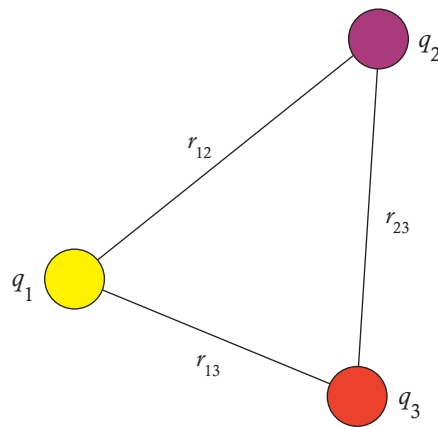


Fig. 4.17 La energía potencial del sistema corresponde al trabajo necesario para traer las cargas, separadas inicialmente una distancia infinita, hasta las ubicaciones mostradas.

Ejemplo 4.8

En la fig. 4.18, 3 cargas están colocadas en los vértices de un rectángulo. **a)** Determina el potencial en el extremo A, debido a las cargas situadas en vértices B y C. **b)** ¿Cuál es la energía potencial electrostática del conjunto formado por las 3 cargas? **c)** ¿Qué trabajo se debe hacer para trasladar la carga q_A desde el punto A hasta el infinito?

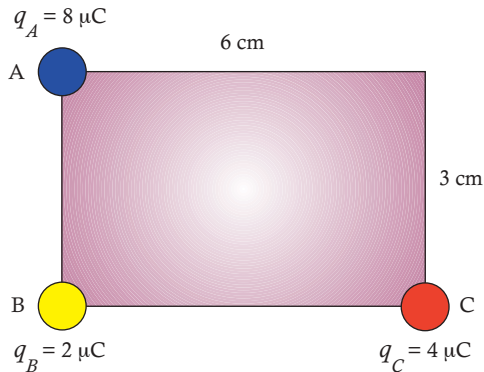


Fig. 4.18 Configuración de cargas para el ejemplo 4.8.

Solución

a) La distancia AC está dada por:

$$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = 6,71$$

Los potenciales debidos a q_B y a q_C son:

$$V_{A(\text{Debido a } q_B)} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$V_{A(\text{Debido a } q_C)} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{6,71 \cdot 10^{-2}} = 5,37 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Entonces:

$$V_A = 11,37 \cdot 10^5 \text{ V}$$

b) De acuerdo a (4.30):

$$W = k \frac{q_A q_B}{r_{AB}} + k \frac{q_A q_C}{r_{AC}} + k \frac{q_B q_C}{r_{BC}}$$

Sacando a la constante k como factor común y sustituyendo valores:

$$W = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{16 \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 10^{-2}} + \frac{32 \cdot 10^{-12}}{6,71 \cdot 10^{-2}} + \frac{8 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$W = 4,8 + 4,29 + 1,2 = 10,29 \text{ J}$$

c) La diferencia de potencial entre un punto situado en el infinito y el punto A es:

$$V_{A\infty} = V_{\infty} - V_A = 0 - V_A = -V_A$$

El trabajo para trasladar la carga de $8 \mu\text{C}$ desde A hasta el infinito se calcula de la manera siguiente:

$$W_{A\infty} = q_A \cdot V_{A\infty} = -q_A V_A = -8 \cdot 10^{-6} \cdot 11,37 \cdot 10^5$$

$$W_{A\infty} = -9,10 \text{ J}$$

El signo negativo significa que es el sistema de cargas compuesto por q_B y q_C el que provee la energía para el traslado. Un agente externo no realizaría trabajo alguno al hacerse el traslado. La carga de $8 \mu\text{C}$ pasa de un punto de alto potencial (A) hacia uno de bajo potencial (∞). Es como si la carga de $8 \mu\text{C}$ “cayera” hacia el infinito. Otro sería el caso si se tratara de una carga negativa, ya que al alejarse la carga del punto A, ésta adquiriría un mayor potencial, lo que implicaría que un agente externo debería hacer un trabajo durante el traslado ($W_{A\infty} > 0$).

4.9 POTENCIAL DEBIDO A CUERPOS ESFÉRICOS CARGADOS

Cualquier cuerpo esférico puede ser visualizado como una carga puntual, si la distancia desde donde se observa es suficientemente grande. Bajo este aspecto, es de esperarse que las expresiones del potencial eléctrico debido a cuerpos esféricos cargados, guarden semejanza con el potencial creado por cargas puntuales. Consideremos una cáscara esférica muy delgada y de radio R (fig. 4.19), la cual posee una carga q , distribuida uniformemente sobre su superficie. Como puede demostrarse, usando la ley de Gauss (capítulo 3), el campo eléctrico fuera de la cáscara ($r > R$), está dado por:

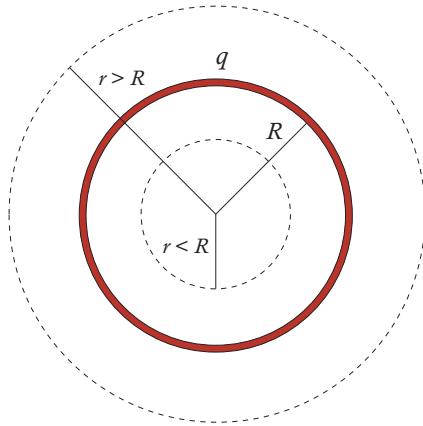


Fig. 4.19 Determinación del potencial debido a una cáscara esférica a una distancia r , que puede estar ubicada en el interior o el exterior de la cáscara.

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

En el interior de la cáscara ($r < R$), el campo es nulo, como puede deducirse aplicando la ley de Gauss.

Si se usan herramientas de cálculo apropiadas, cuyo estudio se aborda en cursos a nivel superior, se puede demostrar que el potencial eléctrico en el exterior de la cáscara está dado por:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (r > R) \quad (4.31)$$

Veamos cuál es el valor del potencial en el interior de la cáscara esférica. En general, cuando el campo eléctrico es igual a cero, es la diferencia de potencial entre dos puntos y, no el potencial en un punto determinado, la cantidad que es nula. Esto puede deducirse de la relación (4.18), en la cual la diferencia de potencial entre dos puntos está relacionada con el campo eléctrico mediante la expresión:

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

donde V_A y V_B son los potenciales de dos puntos cualesquiera en el interior de la cáscara. Como $E = 0$ para $r < R$, de la relación anterior se deduce:

$$V_{AB} = V_B - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A$$

resultado que establece la igualdad del potencial entre dos puntos internos a la cáscara. En otras

palabras, en el interior de la cáscara, el potencial es el mismo en cualquier punto. Si suponemos que el espesor de la cáscara es despreciable, el potencial en cualquier punto de su superficie puede calcularse usandola relación (4.31) con $r = R$:

$$V = k \frac{q}{R} \quad (r = R) \quad (4.32)$$

Como el potencial tiene que ser continuo (es decir, no puede haber saltos bruscos en su valor entre puntos situados muy próximos entre sí), el valor anterior es exactamente igual al potencial en un punto situado inmediatamente por debajo de la cáscara y, por extensión, igual al potencial en cualquier otro punto interno. Es decir:

$$V_A = V_B = k \frac{q}{R}$$

En definitiva, el potencial debido a una cáscara esférica está dado por:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (r > R) \quad (4.33)$$

$$V = k \frac{q}{R} \quad (r \leq R) \quad (4.34)$$

En la fig. 4.20 se indica cómo varía el potencial eléctrico, debido a una cáscara esférica, en función de la distancia.

Cuando se trata de una esfera cargada, de radio R ,

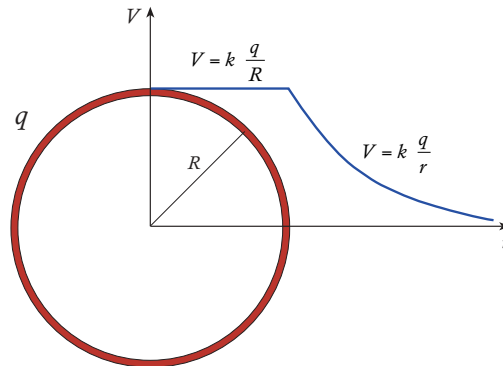


Fig. 4.20 Variación del potencial eléctrico con la distancia para una cáscara esférica.

el potencial eléctrico se puede calcular mediante las expresiones:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (r > R) \quad (4.35)$$

$$V = k \frac{q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (r \leq R) \quad (4.36)$$

4.10 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Una superficie equipotencial es aquella cuyo potencial eléctrico permanece constante en toda su extensión. Tomemos, por ejemplo, una carga puntual positiva, representada en la fig. 4.21. Como ya hemos visto, las líneas de fuerza del campo eléctrico son rectas radiales que parten de la carga y se extienden hacia el infinito. Las superficies equipotenciales son superficies esféricas centradas en la carga, atravesadas perpendicularmente por las líneas de fuerza. En la fig. 4.21 las superficies equipotenciales están representadas por las líneas azules entrecortadas. Es importante resaltar lo siguiente, en relación con las superficies equipotenciales de la fig. 4.21 y que puede hacerse extensivo a cualquier distribución de cargas:

1. Las líneas del campo eléctrico son siempre perpendiculares a las superficies equipotenciales. Para el caso de una carga puntual, estas últimas son esferas y las líneas del campo son radiales, de manera que la perpendicularidad es evidente.

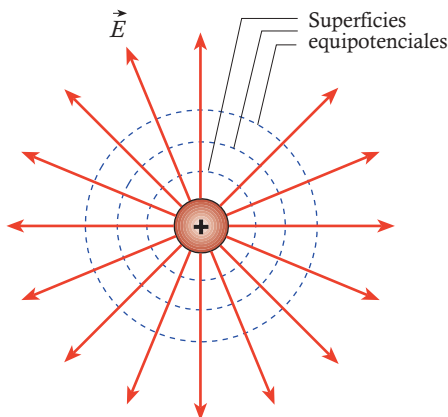


Fig. 4.21 Superficies equipotenciales (líneas azules) para una carga puntual.

2. Como consecuencia de lo anterior, el trabajo realizado para trasladar una carga sobre una superficie equipotencial es igual a cero (recuerda que $W = q V_{AB}$ y como $V_A = V_B$, $V_{AB} = 0$).

Consideremos ahora un campo eléctrico uniforme como el creado por una lámina plana infinita, tal como se muestra en la fig. 4.22.

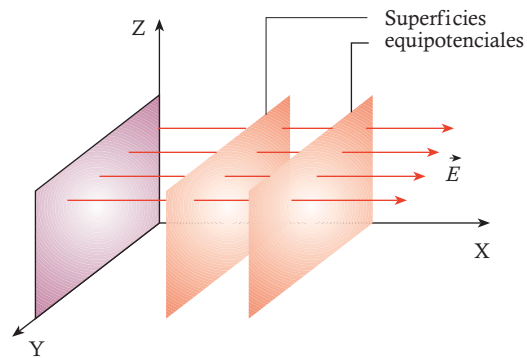


Fig. 4.22 Superficies equipotenciales para el campo eléctrico creado por una lámina infinita de carga.

En este caso, las superficies equipotenciales son planos paralelos al plano Z – Y, perpendiculares a las líneas del campo eléctrico.

4.11 POTENCIAL DE UN CONDUCTOR EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

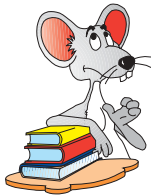
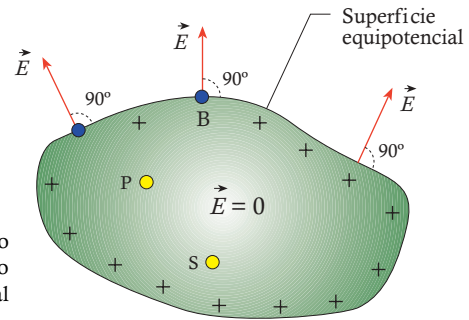
Ya sabemos que en un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico en su interior es nulo y, en la superficie del conductor, el campo es perpendicular en todos sus puntos. Como consecuencia, tal como se representa en la fig. 4.23, al ser el vector desplazamiento perpendicular al vector campo eléctrico, no se realiza trabajo alguno al desplazar una carga desde un punto A hasta un punto B, los dos situados sobre la superficie del conductor. Esto implica que la diferencia de potencial entre esos puntos es cero y podemos escribir:

$$V_A - V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = V_B$$

Como los puntos fueron seleccionados arbitrariamente, la relación anterior es válida para cualquier otra pareja de puntos en la superficie o en el interior del conductor.

Es necesario resaltar que es la diferencia de potencial la que es nula y, no el potencial en un punto, sobre la superficie o en el interior del conductor. Lo que se deduce de la última relación es que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.

Fig. 4.23 La superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial. Bajo esta condición, el campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a la misma y el potencial en su interior es idéntico en cada punto que se considere.



PIENSA Y EXPLICA



- 4.1** Describe los conceptos de potencial eléctrico y el de energía potencial eléctrica.
- 4.2** ¿Existe, realmente, el potencial absoluto de un punto? ¿Qué referencia se toma cuando se mide el potencial eléctrico de un punto?
- 4.3** ¿En qué difieren los conceptos de potencial y diferencia de potencial?
- 4.4** Si una carga positiva se introduce con velocidad inicial igual a cero en un campo eléctrico uniforme, ¿disminuye o aumenta su potencial? ¿disminuye o aumenta su energía potencial?
- 4.5** Si el potencial eléctrico es nulo en un punto, ¿es nulo el campo eléctrico en ese punto?
- 4.6** Si el campo eléctrico es nulo en un punto, ¿es el potencial también nulo en ese punto?
- 4.7** Deduce la expresión para la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme.
- 4.8** Demuestra que el trabajo que se debe realizar un agente externo para trasladar una carga en un campo eléctrico es igual al trabajo que realizaría el campo eléctrico, cambiado de signo (relación 4.8).
- 4.9** Haciendo uso de la figura conveniente, demuestra que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa.
- 4.10** ¿En qué unidades se expresa el potencial eléctrico? ¿Cuál es el significado de esa unidad?
- 4.11** Describe los conceptos de potencial eléctrico y de energía potencial eléctrica.
- 4.12** ¿Qué es un electrón-voltio?
- 4.13** Señalan las líneas del campo eléctrico hacia regiones de más alto o más bajo potencial?
- 4.14** ¿Qué es la energía potencial electrostática de un sistema de cargas?

- 4.15** Deduce la fórmula para determinar el potencial en un punto, debido a una carga puntual. ¿Cuál es la expresión para varias cargas puntuales?
- 4.16** ¿Cuál es el potencial de una cáscara esférica de radio R para regiones internas y externas a la misma? ¿Cuál es el valor del potencial en la superficie de la cáscara?
- 4.17** ¿Qué es una superficie equipotencial?

- 4.18** ¿Por qué las superficies equipotenciales son perpendiculares al campo eléctrico?
- 4.19** ¿Cómo son las superficies equipotenciales en los siguientes casos: **a)** Una carga puntual. **b)** Una esfera cargada. **c)** Un plano infinito. **d)** Una línea de carga de longitud infinita?
- 4.20** Explica por qué la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial.



PROBLEMAS



- 4.1** Si una carga puntual de $10 \mu\text{C}$ se mueve entre dos puntos cuya diferencia de potencial es de 100 V , ¿qué cambio experimenta su energía potencial?
- 4.2** ¿Qué rapidez alcanza una carga positiva de $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (protón), cuando es acelerada a través de una diferencia de potencial de 200 V ?
- 4.3** Un deuterón en reposo es sometido a la acción de una diferencia de potencial de 2 kV . **a)** ¿Cuál es el incremento en su energía? **b)** ¿Cuál es su rapidez?
- 4.4** Un electrón entra en un campo eléctrico uniforme con una velocidad de magnitud $5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. ¿Cuál debe ser la intensidad del campo eléctrico para detenerlo en una distancia de 10 cm ?
- 4.5** Una carga, acelerada a través de una diferencia de potencial de 200 V , aumenta su energía potencial en 10^{-16} J . ¿Cuál es el valor de la carga?

- 4.6** Dos placas paralelas, separadas 10 cm mantienen un campo eléctrico uniforme igual a 10.000 N/C . Un electrón entra por un agujero en la lámina negativa con una energía cinética de $2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$. Determina la velocidad del electrón al alcanzar la lámina positiva.
- 4.7** Una lámina de dimensiones infinitas, como la mostrada en la fig. 4.24, tiene una densidad de carga dada por $\sigma = 2 \mu\text{C/m}^2$. **a)** ¿Cuál es la expresión vectorial del campo eléctrico? **b)** ¿Qué valor tiene la diferencia de potencial entre los puntos A ($x = 0,1 \text{ m}$) y B ($x = 0,5 \text{ m}$)? **c)** ¿Qué trabajo debe realizar un agente externo para trasladar una carga de $1 \mu\text{C}$ desde B hasta A, sin aceleración? **d)** ¿Cuál es el incremento en la energía potencial de esa carga al pasar desde B hasta A? **e)** ¿Qué trabajo realiza el campo al llevar la carga desde A hasta B?

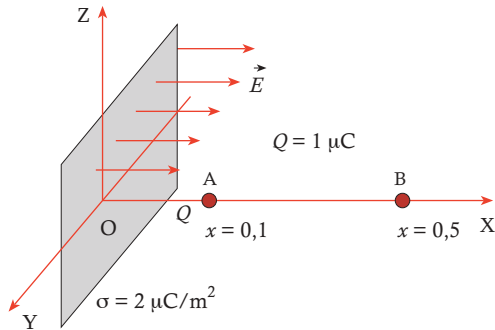


Fig. 4.24 Problema 4.7.

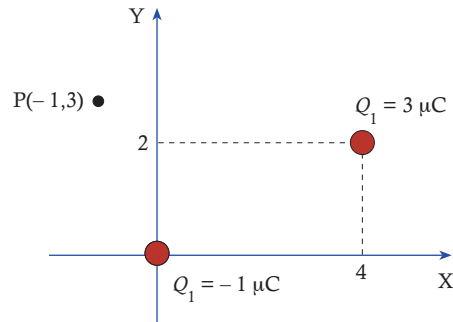


Fig. 4.25 Problema 4.13.

- 4.8** En un campo eléctrico uniforme el potencial en un punto A es de 120 V y en un punto B es de -60 V. **a)** ¿Qué trabajo realizaría una fuente externa para llevar una carga de 5 μC desde B hasta A sin aceleración? **b)** ¿Cuánto vale ese trabajo si el traslado se realiza desde B hacia A?
- 4.9** La velocidad de un electrón se reduce de $4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ (punto A) hasta $0,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ (punto B) en una distancia de 2 cm, cuando se mueve en un campo eléctrico uniforme. **a)** ¿Cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? **b)** ¿Cuál punto se encuentra a potencial más elevado?
- 4.10** Una carga de 10 μC se mueve en un plano desde el origen O hasta un punto P de coordenadas (0,10 m ; 0,40 m). Si el campo eléctrico es uniforme y se expresa como $200\vec{i} \text{ V/m}$, **a)** ¿Qué cambio se produce en la energía potencial de la carga? **b)** ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{OP} ?
- 4.11** Determina el potencial eléctrico a una distancia de 50 cm de una carga puntual de 10 μC .
- 4.12** El potencial en un punto, debido a una carga puntual, es de 50.000 V. Si la carga es de 5 μC , ¿a qué distancia de la carga se encuentra el punto?

- 4.13** Para la configuración mostrada en la fig. 4.25, determina el potencial en el punto P. Las distancias están en metros.
- 4.14** En el problema anterior, determina la energía potencial electrostática del sistema.
- 4.15 a)** Determina el trabajo necesario para trasladar la carga de 3 μC desde el vértice A al vértice C del triángulo equilátero de la fig. 4.26, siguiendo la trayectoria ABC. **b)** ¿Cuál es el valor de ese trabajo si el traslado se realiza siguiendo la trayectoria AC? **c)** ¿Qué cambio en su energía potencial experimenta la carga al pasar desde A hasta C?

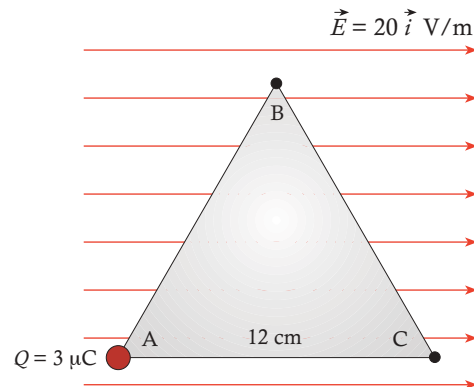


Fig. 4.26 Problema 4.15.

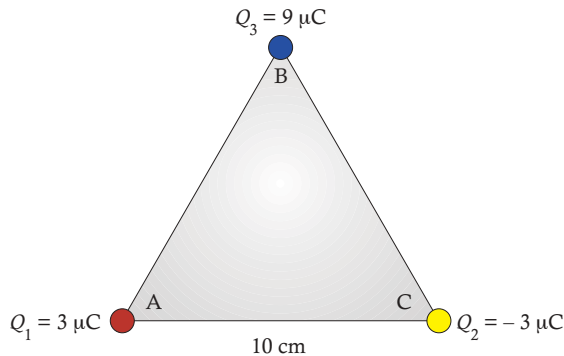


Fig. 4.27 Problema 4.16.

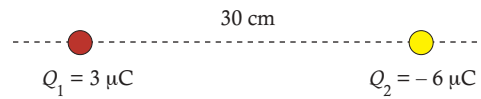


Fig. 4.28 Problema 4.17.

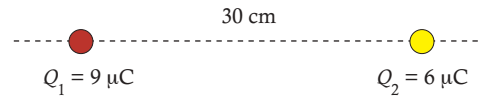


Fig. 4.29 Problema 4.18.

4.16 a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro del triángulo equilátero de la fig. 4.27? b) ¿Cuál es el valor de la energía potencial electrostática del sistema?

4.17 Para las dos cargas de la fig. 4.28, ¿dónde es nulo el campo eléctrico? ¿dónde es nulo el potencial?

4.18 Para las dos cargas de la fig. 4.29, ¿dónde es nulo el campo eléctrico? ¿dónde es nulo el potencial?

4.19 Para el sistema de cargas mostrado en la fig. 4.30, determina el potencial en el punto P.

4.20 Dos esferas de radios 6 y 12 cm y cargas $3 \mu\text{C}$ y $-6 \mu\text{C}$ tienen sus centros separados 60 cm. a) ¿Cuál es el potencial en el punto medio de la recta que une sus centros? b) ¿Cuál es la energía potencial del sistema? c) ¿Qué significado tiene el signo del resultado anterior?

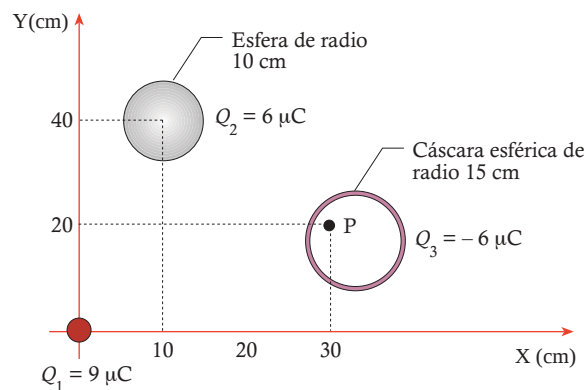
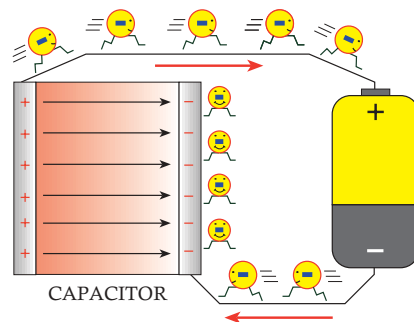


Fig. 4.30 Problema 4.19.

CAPÍTULO 5

CAPACITANCIA



5.1 CAPACITORES .CAPACITANCIA.

El *condensador eléctrico* o *capacitor* es un dispositivo capaz de almacenar carga y energía eléctrica. Aun cuando el término *condensador* se continúa utilizando, actualmente éste ha dejado paso al término *capacitor*, el cual ha sido adoptado en forma oficial como el nombre del dispositivo. En su forma más elemental, y más ampliamente difundida, un capacitor consiste de dos elementos metálicos planos y paralelos separados por un aislante. A los primeros se les conoce como *armaduras* del capacitor, mientras que el aislante corresponde a un dieléctrico. El esquema básico de un capacitor se muestra en la fig. 5.1, junto con el símbolo utilizado para representarlo. Las láminas metálicas y los conectores son usualmente de aluminio, mientras que como dieléctrico se usa una gran variedad de sustancias aislantes. Entre los dieléctricos más utilizados se encuentran: aire, mica, papel, cerámica, plástico, tantalio, vidrio y poliéster. De esta forma, y según el dieléctrico presente, se habla de capacitores de aire, de mica, de papel, etc.

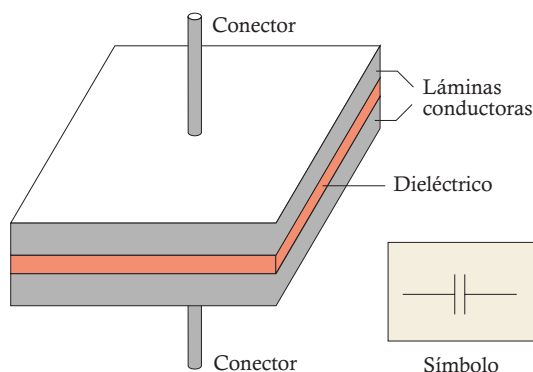


Fig. 5.1 Esquema básico de un capacitor.

El encapsulado de un capacitor puede adoptar distintas formas y, de acuerdo a ellas, se habla de capacitores planos, cilíndricos, esféricos, etc.

Muy variadas son las aplicaciones en las cuales intervienen los capacitores. Encontraremos estos elementos en las fuentes de alimentación de los circuitos que funcionan con corriente continua, en los relojes y contadores electrónicos, en los motores eléctricos, en las redes eléctricas, donde se utilizan para disminuir las llamadas pérdidas reactivas, en los circuitos de encendidos de luces fluorescentes, en los circuitos de destellos de cámaras fotográficas y, en general, en la gran mayoría de circuitos electrónicos, cuyo funcionamiento no sería posible sin su presencia.

Los capacitores se construyen en una amplia gama de tamaños, de acuerdo con el tipo y la aplicación requerida. En las redes eléctricas pueden ser de tamaño relativamente grande, mientras que en los circuitos electrónicos alcanzan un alto grado de miniaturización.

La *capacitancia* o *capacidad* es una propiedad asociada a cada capacitor y mide la capacidad del mismo para almacenar carga eléctrica cuando entre sus armaduras se aplica una diferencia de potencial específica. Debemos mencionar que *la capacitancia es un concepto general que se aplica cuando dos objetos conductores adyacentes, separados por un material no conductor, adquieren cargas iguales y de signo contrario.*

La capacitancia depende, entre otros factores, de la distancia que separa los objetos, del tamaño de los mismos, del voltaje entre ellos y del dieléctrico que se encuentre entre los objetos.

A fin de establecer la propiedad de *capacitancia de un capacitor*, consideremos la fig. 5.2. Dos elementos metálicos, separados por un medio no conductor, han sido cargados con *cargas iguales y de sentido contrario*, mediante otro dispositivo externo que pudiera ser una batería. Bajo estas condiciones, entre los elementos metálicos surge un campo eléctrico y una diferencia de potencial. La capacitancia de un capacitor se define como la razón entre la carga adquirida por la placa cargada positivamente y la diferencia de potencial entre los elementos que forman el capacitor:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5.1)$$

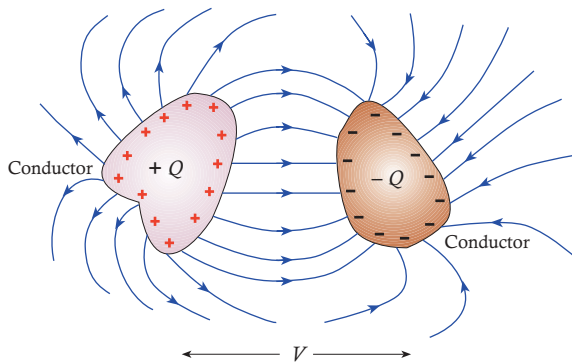


Fig. 5.2 Por definición, la capacitancia de dos elementos conductores con cargas iguales y opuestas, es la razón entre la carga Q adquirida por cualquiera de dichos elementos, dividida entre la diferencia de potencial entre los mismos.

La capacitancia para una configuración específica es un valor constante. Esto se deduce porque al variar la diferencia de potencial entre los elementos conductores, aumenta proporcionalmente la carga almacenada que almacenan.

De acuerdo con la relación (5.1), la capacitancia se expresa en coulombs por voltio (C/V). A esta unidad se le denomina *farad* en honor al físico inglés Michael Faraday, quien estableció el concepto de capacitancia y aportó muchas contribuciones en el estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos. *Al farad se le representa por la letra F*. Entonces, *1 farad es la capacitancia que debe tener un capacitor para almacenar un coulomb de carga cuando la diferencia de potencial entre sus armaduras alcanza 1 voltio*. También podría decirse

que si, al cargar un capacitor aplicándole una diferencia de potencial de un voltio, la carga final es de 1 coulomb, el capacitor tendrá una capacitancia de 1 farad.

Un coulomb corresponde a una cantidad de carga muy grande. Si recordamos que un electrón posee una carga de $1,6 \cdot 10^{-19}$ C, en un coulomb se concentran $1/(1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 625 \cdot 10^{16}$ electrones. Por esta razón, una capacitancia de 1 farad es, igualmente, una capacitancia demasiado grande. De aquí que, en la práctica, se utilizan submúltiplos de este valor. Así se habla de capacitores con valores en el orden de los microfarads, abreviado como μF ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$), los nanofarads, abreviado como nF ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) y los picofarads, abreviado como pF ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

5.2 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA

La determinación de la capacitancia de un capacitor puede ser una operación complicada, dependiendo de la geometría que adopten las armaduras del mismo. En general, el cálculo se reduce a determinar el potencial eléctrico entre las armaduras y efectuar el cociente Q/V . Si V es una función lineal de Q , como sucede en algunos casos sencillos, la carga no aparece en la expresión final de la capacitancia. A continuación calcularemos la capacitancia de un capacitor de placas paralelas y mencionaremos cómo se calcula la capacitancia de capacitores cilíndricos y esféricos.

5.2.1 Capacitancia de un capacitor plano

En la fig. 5.3 se muestra la configuración básica de un capacitor plano con dieléctrico de aire. Se trata de 2 láminas metálicas paralelas separadas una distancia d . El área de cada una de las placas es A y la diferencia de potencial es proporcionada por una batería conectada a las mismas. El borne positivo de la batería atrae los electrones de la armadura metálica a la cual está conectada, dejando a esta última con carencia de electrones, lo que es equivalente a cargar la armadura con carga positiva. Por el contrario, la placa conectada al borne negativo de la batería se carga negativamente. De esta manera y, luego de transcurrido un tiempo muy pequeño, en el espacio entre las placas se origina un campo eléctrico y la diferencia de potencial entre ellas se iguala con el voltaje de la batería.

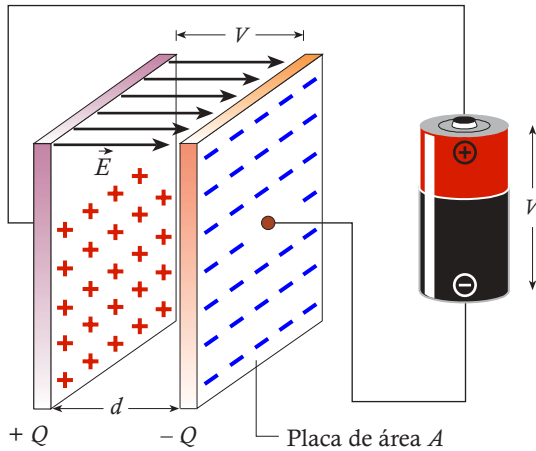


Fig. 5.3 Esquema para la determinación de la capacitancia de un capacitor plano.

Al final del proceso, las placas o armaduras del capacitor se cargan con cargas $+Q$ y $-Q$, de manera que la densidad superficial de carga para cada placa, σ , se hace uniforme e igual a Q/A .

En el capítulo 3, ejemplo 3.11, demostramos, mediante el uso de la ley de Gauss, que el campo eléctrico en el espacio entre dos placas paralelas con cargas opuestas y de igual magnitud estaba dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

Sustituyendo el valor de σ :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (5.2)$$

La diferencia de potencial entre las placas es $V = Ed$. Combinando con la expresión anterior:

$$\frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (5.3)$$

Como $C = Q/V$, la capacitancia de un capacitor plano estará dada por:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (5.4)$$

La anterior relación establece que la capacitancia de

un capacitor plano depende del área de las armaduras y de la distancia entre ellas.

Ejemplo 5.1

Las placas de un capacitor plano tienen un área de 160 cm^2 cada una y están separadas por una capa de aire de 50 cm de espesor. **a)** ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? **b)** ¿Qué diferencia de potencial debe ser aplicada entre las armaduras para obtener una carga de $10^{-3} \mu\text{C}$ en cada una de ellas?

Solución

a) De acuerdo con (5.4):

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{160 \cdot 10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 28,32 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$C = 28,32 \text{ pF}$$

b) Como $C = Q/V$, se tiene:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-6}}{28,32 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^{-9}}{28,32 \cdot 10^{-12}} = 35,31 \text{ V}$$

5.2.2 Capacitancia de un capacitor cilíndrico

Los capacitores cilíndricos tienen una geometría como la mostrada en la fig. 5.4. Las placas del capacitor son los cilindros interno y externo de radios

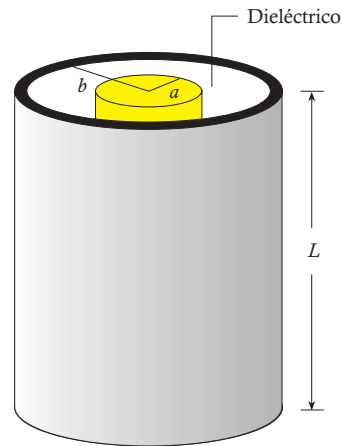


Fig. 5.4 Capacitor cilíndrico

a y b , respectivamente. La altura de ambos cilindros es L y entre las armaduras metálicas, comúnmente de aluminio, existe un dieléctrico que en nuestro caso supondremos que es aire. Puede demostrarse, haciendo uso de la ley de Gauss y del llamado cálculo integral, que la capacitancia del capacitor cilíndrico se expresa mediante la fórmula:

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5.5)$$

Como se puede observar de la relación anterior, la capacitancia depende, en este caso, de la longitud del capacitor, de la razón entre sus radios externo e interno y de la permeabilidad del vacío ϵ_0 . Cuando el medio no es aire o el vacío, debe utilizarse la permitividad del medio, ϵ .

Ejemplo 5.2

Un cable coaxial consiste de un conductor central de radio $a = 1,6$ cm y de otro conductor cilíndrico de radio $b = 2,8$ cm, concéntrico con el primero. El dieléctrico entre ambos conductores tiene una permitividad $\epsilon = 30,98 \cdot 10^{-12}$ C/Nm². ¿Cuánto es la capacitancia por metro del cable coaxial?

Solución

Según la fórmula (5.5):

$$C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Usando los valores dados:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 30,98 \cdot 10^{-12} \cdot L}{\ln\left(\frac{2,8}{1,6}\right)} = \frac{194,65 \cdot 10^{-12} \cdot L}{0,56}$$

Para determinar la capacitancia por unidad de longitud, dividimos el resultado anterior por L :

$$C = 347,59L \text{ pF} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{L} = 347,59 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

5.2.3 Capacitancia de un capacitor esférico

Un corte transversal de un capacitor esférico se muestra en la fig. 5.5. Se trata de una cáscara esférica interna de radio a y otra cáscara esférica externa de radio b ($b > a$). Ambas cáscaras tienen un espesor muy pequeño. Entre ellas se encuentran un material dieléctrico de constante ϵ .

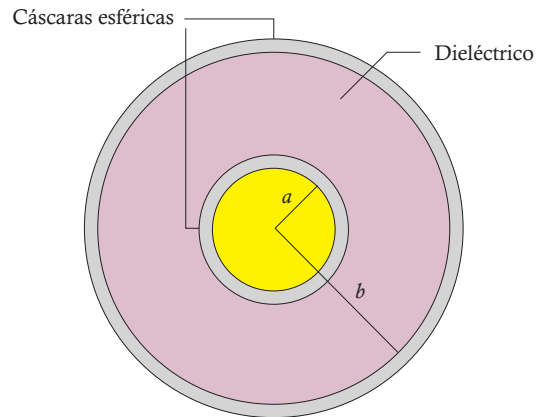


Fig. 5.5 Capacitor esférico.

Para este capacitor, puede demostrarse que la capacitancia tiene la siguiente expresión:

$$C = \frac{4\pi \epsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

Arreglando la fórmula anterior:

$$C = 4\pi \epsilon \frac{ab}{b - a} \quad (5.6)$$

Nuevamente, observamos que la capacitancia depende de la geometría (radio a y b) y de la constante dieléctrica del capacitor.

La relación (5.5) permite indagar sobre la capacitancia de una esfera conductora aislada con carga Q . Recordemos que en el caso de un conductor, la carga libre se distribuye en su superficie, de forma que podríamos asemejar esa distribución de carga a la que tiene lugar en una cáscara esférica. Si imaginamos que la cáscara esférica externa se encuentra

a una distancia muy lejana de la interna, podemos hacer $b \rightarrow \infty$ en (5.5), con lo que obtenemos:

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty}\right)} = 4\pi \epsilon_0 a \quad (5.7)$$

expresión en la que hemos asumido que la esfera se encuentra en el aire, donde la permitividad es muy cercana a la del vacío.

Ejemplo 5.3

Los radios interno y externo de un condensador esférico son 5 y 10 cm, respectivamente. Si el espacio entre las dos cortezas esféricas está ocupado por aire, **a)** ¿Cuál es su capacitancia? **b)** Si se aplica una diferencia de potencial de 1.000 V, ¿qué carga se acumulará en las cáscaras esféricas?

Solución

a) De acuerdo con (5.6):

$$C = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{50 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-2}} = 11,12 \text{ pF}$$

b) Como $V = 1.000 \text{ V}$, tenemos:

$$Q = CV = 11,12 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

5.3 EFECTO DEL DIELECTRICO EN UN CAPACITOR

Hemos visto que entre las armaduras o láminas de un capacitor se puede colocar un material aislante o dieléctrico, cuyos principales efectos son los siguientes:

- Aumento de la capacitancia del capacitor.
- Mejora en la rigidez mecánica de la estructura física del capacitor.

Para ver cómo un dieléctrico aumenta la capacitancia, consideremos la fig. 5.6. En la parte (a) de dicha figura, las placas del capacitor plano se carga

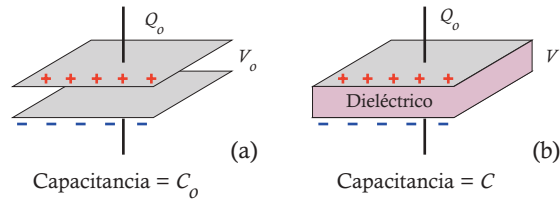


Fig. 5.6 Cuando se coloca un dieléctrico entre las placas de un capacitor, su capacitancia aumenta.

mediante una batería externa y luego se desconecta esta última. De esta forma, las placas adquieren una carga Q_o y la lectura de la diferencia de potencial entre las placas del condensador, medida mediante un voltímetro conectado a las mismas, es V_o . Si ahora introducimos un dieléctrico entre las láminas, fig. 5.6 (b), y medimos, nuevamente, la diferencia de potencial entre las placas, encontramos que éste ha disminuido hasta cierto valor, el cual depende del tipo de dieléctrico que se introdujo. De esta manera, encontramos:

$$V = \frac{V_o}{\kappa} \quad (5.8)$$

donde a κ (letra griega kappa) se le conoce como *constante dieléctrica* y su valor es mayor o igual que 1. Como consecuencia, la presencia de un dieléctrico entre las placas de un capacitor provoca la disminución del voltaje entre ellas.

Es preciso hacer notar que la carga, C_o , en el capacitor de la fig. 5.6 es la misma, antes y después de haber colocado el dieléctrico. El valor de la capacitancia con dieléctrico es:

$$C = \frac{Q_o}{V} = \frac{Q_o}{\frac{V_o}{\kappa}} = \kappa \frac{Q_o}{V_o} = \kappa C_o \quad (5.9)$$

$$C = \kappa C_o \quad (5.10)$$

Como C_o es la capacitancia del capacitor sin dieléctrico, la relación anterior demuestra que cuando se introduce un dieléctrico, la capacitancia aumenta de acuerdo con el valor de la constante dieléctrica κ .

Se ha de señalar, además, que la constante κ es la relación que existe entre la permitividad en cualquier medio (ϵ) y la permitividad en el vacío (ϵ_0):

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (5.11)$$

En la tabla 5.1 se presentan valores típicos de la constante dieléctrica para algunos materiales.

Material	Constante Dieléctrica (κ)
Vacío	1
Aire seco	1,00059
Baquelita	3,5 - 5,0
Vidrio	5 - 10
Mica	3 - 6
Mylar	3,1
Plexiglass	3,40
Polietileno	2,25
Papel	3,5
Teflón	2,1
Agua	80,4

Tabla 5.1 Constante dieléctrica para algunos materiales.

La disminución de la diferencia de potencial entre las armaduras de un capacitor viene, a su vez, acompañada de una disminución del campo eléctrico en la misma proporción en que disminuye la diferencia de potencial. En efecto, como $E = V/d$, al dividirse V por κ , también E resulta dividido por esa cantidad. Entonces, cuando un dieléctrico está presente, podemos escribir:

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (5.12)$$

La disminución del campo eléctrico puede explicarse por la polarización que tiene lugar en el dieléctrico, cuando se introduce entre las placas cargadas. Para entender esto, hacemos referencia a las figs. 5.7 y 5.8. En la fig. 5.7(a), se muestra las moléculas polares de un dieléctrico, las cuales se encuentran orientadas al azar. Cuando se aplica un campo eléctrico en dos caras paralelas del dieléctrico, las moléculas tienden a alinearse en la dirección del campo, tal como lo muestra la fig. 5.7(b). Bajo esta condición se dice que el dieléctrico está polarizado y se crea dentro

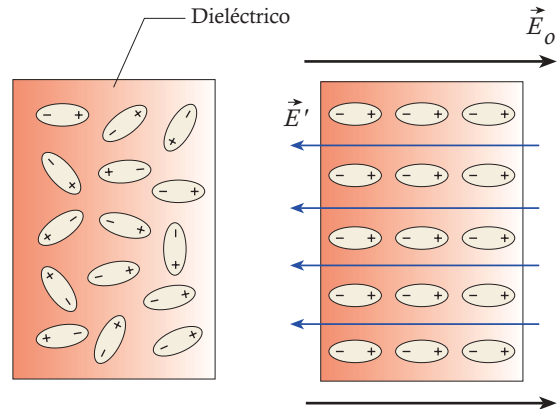


Fig. 5.7 Inducción de un campo eléctrico, E' dentro de un dieléctrico mediante un campo externo E_0 .

del mismo un campo eléctrico de menor intensidad que el aplicado, pero que se opone al mismo.

Llamaremos E_0 al campo externo aplicado y E' al que internamente se induce dentro del dieléctrico, como consecuencia de la alineación de las moléculas polares. La fig. 5.8 muestra un capacitor plano con el dieléctrico entre sus placas. La magnitud del campo resultante, E , es la diferencia entre E_0 y E' :

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\kappa} \quad (5.13)$$

De la relación anterior, podemos determinar el campo inducido en el dieléctrico:

$$E' = E_0 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \quad (5.14)$$

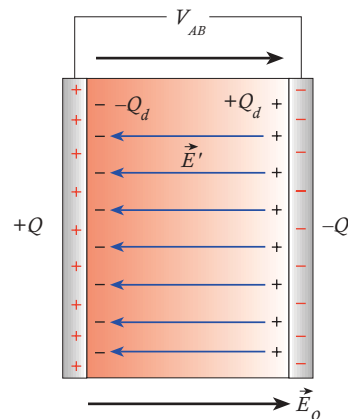


Fig. 5.8 Condensador plano con un dieléctrico.

Obsérvese que dentro del dieléctrico, en sus superficies laterales se acumulan cargas de signo opuesto (Q_d) a las que se almacenan en la superficie de las placas conductoras. Son estas cargas las que crean el campo en el dieléctrico.

La presencia de un dieléctrico entre las armaduras de un capacitor da lugar a indagar sobre el máximo voltaje $V_{AB(máx)}$ que puede aplicarse sin que se produzca una descarga eléctrica entre sus bornes. Esta descarga se manifiesta en forma de una chispa que, usualmente tiene efectos destructivos. Como el voltaje crea un campo eléctrico dentro del capacitor, es usual referirse al máximo campo que pueda aplicarse al mismo, sin que se produzca la ruptura eléctrica, como *resistencia dieléctrica*. En la tabla 5.2 se indica la resistencia dieléctrica de algunos materiales. Estas se expresan, comúnmente en V/m. En el vacío, no se produce descarga alguna y, por tanto, su resistencia dieléctrica es infinita.

Material	Resistencia Dieléctrica (V/m)
Vacío	∞
Aire seco	$3 \cdot 10^6$
Baquelita	$24 \cdot 10^6$
Vidrio	$14 \cdot 10^6$
Mica	$(10 - 100) \cdot 10^6$
Mylar	$24 \cdot 10^6$
Plexiglass	$40 \cdot 10^6$
Polietileno	$50 \cdot 10^6$
Papel	$14 \cdot 10^6$
Teflón	$60 \cdot 10^6$

Tabla 5.2 Resistencia dieléctrica para algunos materiales.

Ejemplo 5.4

Un capacitor de placas paralelas tiene una superficie de placa de 5 cm^2 , separadas por un dieléctrico de teflón de espesor 1 mm . a) ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? b) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede soportar? c) ¿Cuál es la carga máxima que puede almacenar entre sus placas?

Solución

a) De acuerdo con la relación (5.10), la capacitancia está dada por $C = \kappa C_o$. El valor de κ para el teflón,

según la tabla 5.1 es de 2,1. Entonces:

$$C = \kappa \epsilon_o \frac{A}{d} = 2,1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-3}} = 92,93 \cdot 10^{-13} \text{ F}$$

$$C = 9,29 \text{ pF}$$

b) La resistencia dieléctrica del teflón es, de acuerdo a la tabla 5.2, igual a $60 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Esto corresponde a la mayor intensidad del campo eléctrico que se puede aplicar. Luego, la máxima diferencia de potencial que se puede aplicar a las placas del capacitor es:

$$V_{AB(máx)} = E_{máx} \cdot d = 60 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 60.000 \text{ V}$$

c) La carga máxima que puede almacenar es capacitor está dada por:

$$Q_{máx} = C \cdot V_{AB(máx)} = 9,29 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^4$$

$$Q_{máx} = 55,74 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 0,56 \text{ } \mu\text{C}$$

Ejemplo 5.4

Un capacitor plano aislado tiene una capacitancia de $10 \text{ } \mu\text{F}$ cuando un dieléctrico de constante dieléctrica igual a 5 rellena sus placas. Bajo esta condición, la carga acumulada en sus armaduras es de $500 \text{ } \mu\text{C}$. a) Determina el voltaje en el capacitor. b) Si se retira el dieléctrico, ¿cuál es el nuevo voltaje en el capacitor?

Solución

a) El valor del voltaje se determina de la forma siguiente:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ V}$$

b) Si se retira el dieléctrico, la carga permanece intacta, ya que no puede escapar de las placas. La capacitancia corresponde a la de un capacitor sin dieléctrico. De acuerdo a la relación (5.10):

$$C_o = \frac{C}{\kappa} = \frac{10}{5} = 2 \text{ } \mu\text{F}$$

Finalmente, el nuevo voltaje es:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 250 \text{ V}$$

5.4 ENERGÍA EN UN CAPACITOR

Al comienzo de este capítulo, mencionamos que un capacitor era un elemento utilizado para almacenar energía eléctrica. Esta energía, por supuesto, tiene que provenir de una fuente externa. El proceso que tiene lugar lo ilustra la fig. 5.9. La fuente externa es una pila conectada a los bornes del capacitor. La pila crea una corriente de electrones desde la placa positiva hacia la placa negativa. Es el trabajo realizado por esta fuente sobre los electrones lo que permite el traslado de los mismos. Este trabajo se convierte en energía almacenada en las placas. Para cuantificar esta energía pensemos cómo tiene lugar el proceso de carga. Al comenzar el capacitor a cargarse, aparece una pequeña diferencia de potencial, proporcional al incremento de carga ΔQ , dada por $\Delta V = \Delta Q/C$. A medida que aumenta la carga en el capacitor, esa diferencia de potencial va aumentando en forma lineal, tal como lo indica la gráfica de la fig. 5.10. El trabajo elemental para transportar esa carga se puede expresar como:

$$\Delta W_i = V_i \Delta Q$$

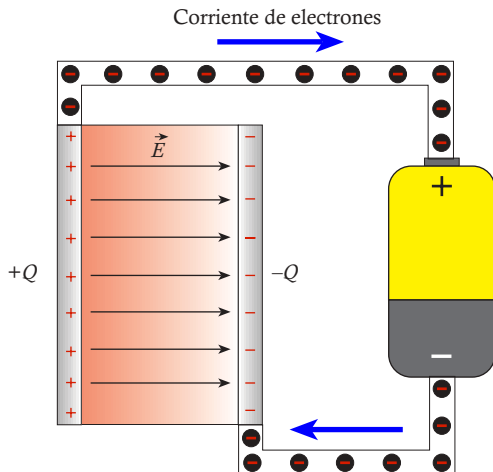


Fig. 5.9 Trabajo realizado por una fuente externa para desplazar las cargas en las placas de un capacitor plano.

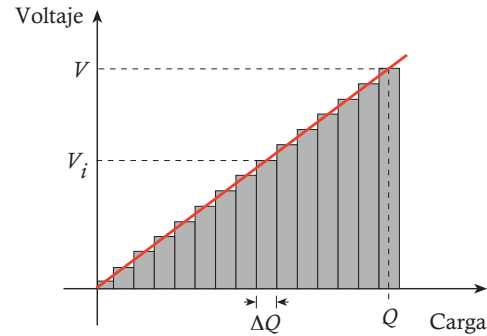


Fig. 5.10 Gráfica que ilustra cómo se incrementa el voltaje a medida que aumenta la carga en un capacitor.

Donde ΔW_i es el trabajo correspondiente al transporte de una carga dada por ΔQ , cuando el voltaje es V_i . El trabajo total realizado por la pila externa es la suma de cada uno de estos trabajos elementales y corresponde al área del triángulo de base Q y de altura V , de la fig. 5.10. Entonces:

$$W = \frac{1}{2} QV \quad (5.15)$$

El trabajo efectuado para mover las cargas en la fig. 5.9, es igual a la energía almacenada en el capacitor. Luego, podemos escribir:

$$U = \frac{1}{2} QV \quad (5.16)$$

Como $Q = CV$, la relación anterior puede escribirse de las siguientes maneras:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (5.17)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.18)$$

Observa que en las relaciones anteriores no aparecen cantidades como la separación entre las placas o su superficie, por lo que las mismas son aplicables a cualquier capacitor, independientemente de su geometría. La energía máxima que puede almacenar

un capacitor depende del valor de su capacitancia y del voltaje aplicado, tal como lo revela la relación (5.16). Esto, a su vez, tiene que ver con su resistencia dieléctrica.

La energía almacenada en las placas de un capacitor es la responsable de los desagradables efectos que podemos constatar cuando tocamos un capacitor cargado. *¡En este caso, la descarga a tierra tiene lugar a través de nuestro cuerpo!*

Como el potencial y el campo eléctrico están relacionados, es usual expresar la energía de un capacitor en término del campo. Para un capacitor plano, la capacitancia está dada por:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Sustituyendo en la relación (5.16):

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{\epsilon_0 A d E^2}{2}$$

La *energía por unidad de volumen*, designada por la letra u , se obtiene dividiendo el volumen del espacio entre las placas del capacitor:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (5.19)$$

La relación anterior, aunque fue deducida para un capacitor de placas paralela, es válida para cualquier tipo de capacitor.

Ejemplo 5.5

Un capacitor de $4 \mu\text{F}$ se conecta a una batería de 50 voltios. Luego que el capacitor se carga completamente, se desconecta la batería y se introduce un dieléctrico de constante dieléctrica $\kappa = 5$ entre las placas. **a)** ¿Cuál es el valor del voltaje, luego de introducir el dieléctrico? **b)** ¿Cuál es la energía almacenada antes de introducir el dieléctrico? **c)** ¿Cuál es la energía almacenada después de introducir el dieléctrico? **d)** ¿Qué trabajo se hizo para extraer el dieléctrico de las láminas?

Solución

a) Inicialmente, el capacitor adquiere una carga Q_o , al conectarse el capacitor a la batería de 50 V. Si llamamos V_o y C_o al voltaje y la capacitancia en el aire, respectivamente, tenemos:

$$Q_o = C_o V_o = (4 \cdot 10^{-6}) \cdot 50 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Una vez que se introduce el dieléctrico, el valor de la capacitancia aumenta a:

$$C = \kappa C_o = 5 \cdot (4 \cdot 10^{-6}) = 20 \mu\text{F}$$

Como la carga permanece invariable al desconectar la batería, el nuevo valor del voltaje es:

$$V = \frac{Q_o}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ V}$$

Este valor pudo haberse obtenido, también, mediante la relación (5.8):

$$V = \frac{V_o}{\kappa} = \frac{50}{5} = 10 \text{ V}$$

b) La energía almacenada antes de introducir el dieléctrico está dada por:

$$U_o = \frac{1}{2} Q_o V_o = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 10^{-4}) \cdot 50 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

c) Luego que se introduce el dieléctrico tenemos:

$$U = \frac{1}{2} Q_o V = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 10^{-4}) \cdot 10 = 10^{-3} \text{ J}$$

d) Como puede deducirse, de los resultados anteriores, la energía en el capacitor, una vez colocado el dieléctrico, es menor que en el caso sin dieléctrico. Por tanto, se concluye que se gastó energía en la extracción del dieléctrico. O, lo que es lo mismo, el agente externo que lo extrajo realizó un trabajo, dado por la diferencia entre los dos valores de energía:

$$W = \Delta U = U_o - U = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ejemplo 5.6

Un capacitor plano, con aire como dieléctrico, tiene placas conductoras de área $0,5 \text{ cm}^2$, separadas por una distancia de 2 mm . Si una batería de 18 voltios se conecta al capacitor, determina: **a)** El campo eléctrico entre las placas. **b)** La capacitancia. **c)** La carga del capacitor. **d)** La densidad superficial de carga en las armaduras. **e)** La energía almacenada en el capacitor. **f)** Repite los cálculos anteriores si se intercala un dieléctrico de plexiglass de constante dieléctrica igual a $3,40$.

Solución

a) El campo eléctrico está relacionado con la diferencia de potencial mediante la expresión $E = V/d$. De acuerdo a esto:

$$E_o = \frac{V_o}{d} = \frac{18 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 9.000 \text{ V/m}$$

b) La capacitancia del capacitor es:

$$C_o = \epsilon_o \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{0,5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,21 \cdot 10^{-13} \text{ F}$$

c) La carga que almacena el capacitor está dada por:

$$Q_o = C_o \cdot V_o = 2,21 \cdot 10^{-13} \cdot 18 = 3,98 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

d) Para calcular la densidad superficial de carga de las placas, dividimos la carga por el área de las mismas:

$$\sigma_o = \frac{Q_o}{A} = \frac{3,98 \cdot 10^{-12}}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 7,96 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

e) La energía almacenada entre las placas es:

$$U_o = \frac{1}{2} Q_o V_o = \frac{1}{2} \cdot 3,98 \cdot 10^{-12} \cdot 18 = 3,58 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

f) Cuando se intercala el dieléctrico, los valores de las cantidades anteriores son:

$$E = \frac{E_o}{\kappa} = \frac{9.000}{3,40} = 2.647,05 \text{ V/m}$$

$$C = \kappa C_o = 3,40 \cdot 2,21 \cdot 10^{-13} = 7,51 \cdot 10^{-13} \text{ F}$$

$$Q = C \cdot V = \kappa C_o \cdot \frac{V_o}{\kappa} = C_o \cdot V_o = 3,98 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q_o}{A} = 7,96 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q_o \frac{V_o}{\kappa} = \frac{U_o}{\kappa} = \frac{3,58 \cdot 10^{-11}}{3,40} = 1,05 \cdot 10^{-11}$$

5.5 CONEXIÓN DE CAPACITORES

En algunas aplicaciones prácticas, es necesario tener dos o más capacitores conectados en una cierta configuración. El fin que se persigue es obtener un mayor o menor valor de capacitancia en el circuito con el cual se está trabajando. La diferencia de potencial a través de las armaduras de un capacitor, así como la carga que se almacena en las mismas se obtiene a partir de una fuente de voltaje externa que, usualmente es una batería. De allí que la conexión de capacitores esté asociada con la presencia de pilas, baterías o cualquier otro dispositivo que permita el funcionamiento conveniente de los mismos.

Existen dos conexiones básicas en las redes con capacitores: la *conexión en paralelo* y la *conexión en serie*.

5.5.1 Capacitores en paralelo. Dos o más capacitores están en paralelo cuando se conectan de la manera indicada en la fig. 5.11. La fig. 5.11(a) es la representación circuital de la conexión en paralelo. Dos placas están conectadas al terminal positivo de la batería, mientras que las otras dos se conectan al terminal negativo. De esta forma, la diferencia de

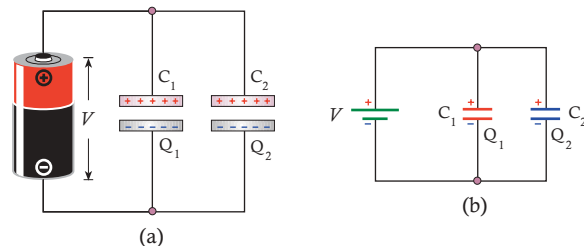


Fig. 5.11 a) Conexión de capacitores en paralelo. b) Diagrama circuital representativo de la conexión en paralelo.

potencial entre las placas de los capacitores es la misma para ambos. La carga suministrada por la pila, se reparte entre los dos capacitores, de manera que la carga suministrada por la batería es igual a la suma de las cargas almacenada en los capacitores:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (5.20)$$

Hay que observar que las cargas Q_1 y Q_2 son adquiridas por los capacitores sólo después de transcurrido un tiempo desde la conexión de la pila. Una vez que este proceso se estabiliza, la diferencia de potencial entre las placas se hace igual al voltaje de la fuente externa aplicada.

Lo expuesto anteriormente nos permite afirmar lo siguiente en relación con capacitores conectados en paralelo:

- La carga recibida por dos o más capacitores se reparte entre ellos, de manera que la carga total es igual a la suma de las cargas que reciben los capacitores.
- La diferencia de potencial es la misma en cada uno de los capacitores.

Ahora bien, es posible sustituir dos o más capacitores conectados en paralelo por un solo *capacitor equivalente*. Para determinar la capacitancia de ese capacitor equivalente, observemos la fig. 5.11. La carga de cada capacitor está dada por:

$$Q_1 = C_1 V \quad Q_2 = C_2 V \quad (5.21)$$

Un capacitor equivalente debe ser capaz de almacenar una carga $Q_1 + Q_2$ cuando la diferencia de potencial entre sus bornes es V voltios. Entonces:

$$Q_1 + Q_2 = C_p V$$

$$C_p = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2$$

Es decir, dos capacitores en paralelo pueden ser sustituidos por un sólo capacitor de capacitancia:

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (5.22)$$

Es relevante destacar, entonces, que la capacitancia de capacitores en paralelo es mayor que la de cualquiera de los capacitores conectados. En general, n capacitores conectados en paralelo se pueden sustituir por un solo capacitor de capacitancia:

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (5.23)$$

5.5.2 Capacitores en serie. Dos o más capacitores están en serie cuando se conectan de la manera indicada en la fig. 5.12.

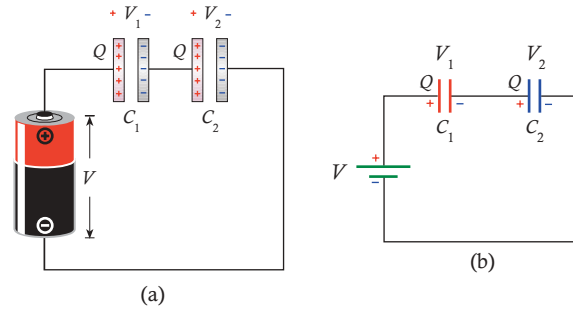


Fig. 5.12 a) Conexión de capacitores en serie. b) Diagrama circuital representativo de la conexión en serie.

Una vez conectada la pila, se extraen electrones de la placa izquierda de C_1 , los cuales son trasladados a la placa derecha de C_2 . Como consecuencia, ambas placas adquieren la misma carga. A su vez, la placa derecha de C_1 adquiere una carga negativa, ya que sus electrones y los de la placa izquierda de C_2 se ven atraídos por la carga positiva de la placa izquierda de C_1 . Esto produce una carga positiva en la placa izquierda de C_2 . Como resultado de ese proceso, las placas izquierdas adquieren una carga $+Q$, mientras que las placas derechas adquieren una carga $-Q$.

De lo anterior y según la fig. 5.12, podemos decir que en una combinación de dos capacitores en serie:

- La carga de capacitores es la misma para cada uno de los capacitores que intervienen en la conexión.
- El voltaje, V , aplicado a los capacitores conectados, se divide de manera que $V = V_1 + V_2$.

Entonces, un capacitor C_s equivalente a varios capacitores conectados en serie, cumple con las dos condiciones anteriores:

$$V = V_1 + V_2 \quad (5.24)$$

Para C_s , se cumple:

$$C_s = \frac{Q}{V} \quad (5.25)$$

Como $Q_1 = Q_2 = Q$, las capacitancias de C_1 y C_2 pueden expresarse como:

$$C_1 = \frac{Q}{V_1} \quad C_2 = \frac{Q}{V_2} \quad (5.26)$$

Combinando las tres expresiones anteriores:

$$\frac{Q}{C_s} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (5.27)$$

Eliminado Q :

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (5.28)$$

Si en lugar de dos, tenemos n capacitores:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (5.29)$$

Si se analizan las expresiones (5.27) y (5.28), se puede deducir que la capacitancia equivalente en serie es menor que cualquiera de los valores de capacitancia de los capacitores que intervienen en la conexión.

Ejemplo 5.7

Para la combinación de capacitores mostrada en la fig. 5.13, determina: **a)** La capacitancia equivalente entre los terminales de la batería. **b)** La diferencia de potencial y la carga en cada capacitor.

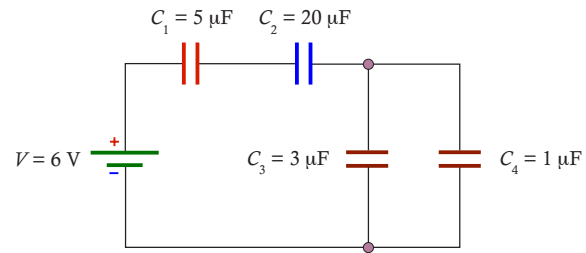


Fig. 5.13 Conexión de capacitores para el ejemplo 5.7.

Se trata de 2 capacitores en serie (C_1 y C_2) conectados a 2 capacitores en paralelo (C_3 y C_4). En la fig. 5.14 se muestran reducciones sucesivas del circuito. En la parte (a) se ha determinado la capacitancia equivalente de los capacitores en paralelo:

$$C_p = C_3 + C_4 = 4 \mu\text{F}$$

Luego, en la parte (b) se combinaron los capacitores C_1 y C_2 con C_p para obtener la capacitancia equivalente que llamaremos C_s :

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_p} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+5}{20} = \frac{10}{20} \mu\text{F}$$

$$C_s = 2 \mu\text{F}$$

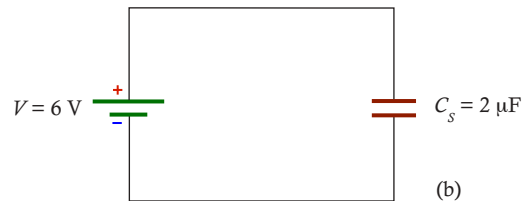
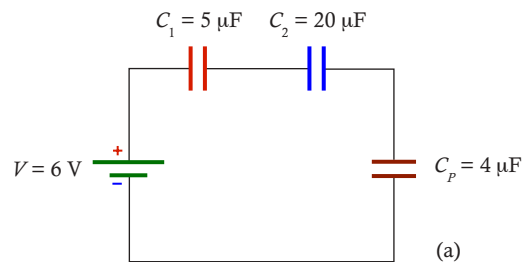


Fig. 5.14 Reducción del circuito de capacitores del ejemplo 5.7.

Solución

b) La carga del capacitor C_s es la misma que la que poseen los capacitores C_1 , C_2 y C_p , por ser esta combinación en serie la que da origen a C_s :

$$Q_1 = Q_2 = Q_p = C_s \cdot V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Con el valor anterior calculamos la diferencia de potencial en el capacitor C_p :

$$V_p = \frac{Q_p}{C_p} = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 3 \text{ V}$$

El valor anterior también corresponde a las diferencias de potencial en los capacitores C_3 y C_4 , por estar conectados en paralelo:

$$V_3 = V_4 = 3 \text{ V}$$

Las cargas en estos capacitores son:

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 3 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_4 = C_4 \cdot V_4 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 3 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Las diferencias de potencial en C_1 y C_2 son:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} = 2,4 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 0,6 \text{ V}$$

Ejemplo 5.8

a) Un capacitor de 20 pF se carga hasta alcanzar una diferencia de potencial de 3 kV, se desconecta de la fuente de energía y, posteriormente, se conecta en paralelo con otro capacitor de 50 pF. Determina la carga de cada capacitor. b) ¿Cuál es la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor, si se conectan en serie?

Solución

a) En la fig. 5.15 se muestra el capacitor de 20 pF cuando está conectado a una fuente externa de 3 kV y luego, una vez cargado, asociado con el capacitor de 50 pF.

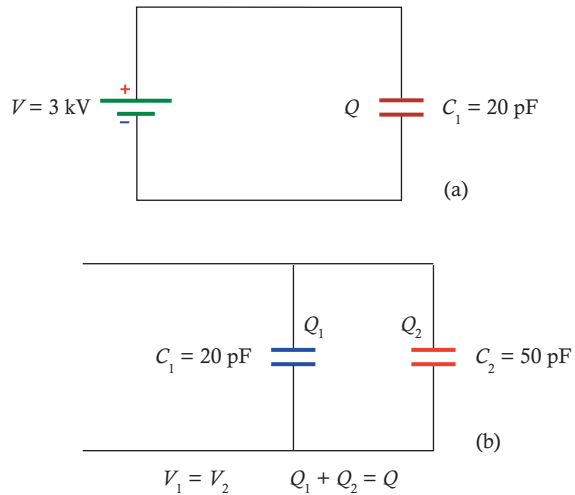


Fig. 5.15 Combinación de capacitores en paralelo para el ejemplo 5.8.

Al conectarse a la fuente de 3 kV, el capacitor C_1 adquiere una carga dada por:

$$Q = C_1 \cdot V = 20 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^3 = 60 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Luego que C_1 se une en paralelo al capacitor de 50 pF, las diferencias de potencial de ambos se igualan y la carga original se reparte:

$$V_1 = V_2 \quad Q_1 + Q_2 = Q = 60 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Como $Q_1 = C_1 \cdot V$ y $Q_2 = C_2 \cdot V$, tenemos:

$$C_1 \cdot V + C_2 \cdot V = 60 \cdot 10^{-9} \Rightarrow V(C_1 + C_2) = 60 \cdot 10^{-9}$$

$$V = \frac{60 \cdot 10^{-9}}{70 \cdot 10^{-12}} = \frac{6}{7} \cdot 10^3 \text{ V}$$

Las cargas en cada capacitor son:

$$Q_1 = C_1 \cdot V = 20 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{6}{7} \cdot 10^3 = 17,14 \text{ nC}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V = 50 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{6}{7} \cdot 10^3 = 42,86 \text{ nC}$$

b) Al conectarse C_1 con C_2 en serie, una vez separado C_1 de la batería, se alcanza la configuración mostrada en la fig. 5.16.

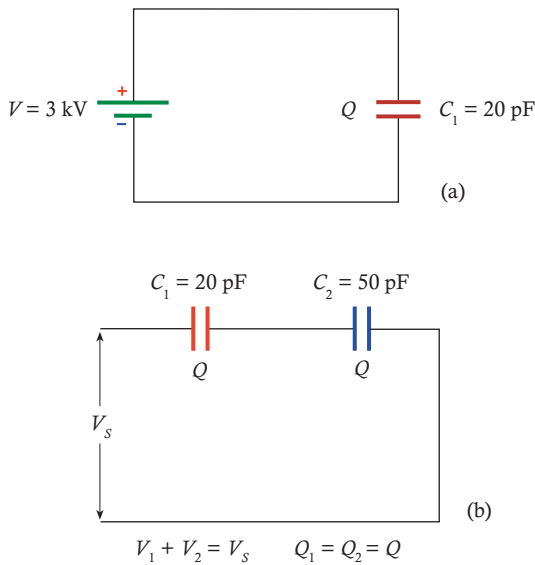


Fig. 5.16 Combinación de capacitores en serie para el ejemplo 5.8.

En este caso, el voltaje, V_s , entre los bornes de los capacitores, se divide entre los mismos; pero la carga, por tratarse de una asociación en serie, permanece igual a la carga adquirida por C_1 cuando se conectó inicialmente a la fuente:

$$Q_1 = Q_2 = Q = 60 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad V_1 + V_2 = V_s$$

Los voltajes en C_1 y C_2 , después de la conexión son:

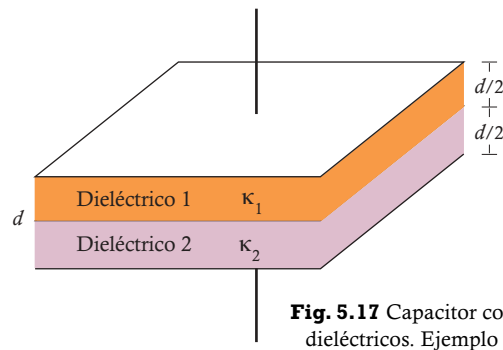
$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{60 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-12}} = 3 \text{ kV}$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{60 \cdot 10^{-9}}{50 \cdot 10^{-12}} = 1,2 \text{ kV}$$

Ejemplo 5.9

Se colocan dos dieléctricos de espesor $d/2$ entre las placas de un capacitor plano, como se indica en la fig. 5.17. Si los dieléctricos tienen constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 y, si antes de colocarlos el valor de la capacitancia en el vacío era C_o , ¿cuál es el nuevo valor de la capacitancia?

Solución



En la fig. 5.18 se observa un corte del capacitor de la fig. 5.17. La diferencia de potencial entre las placas del capacitor es:

$$V = V_1 + V_2$$

Si llamamos E_o , E_1 y E_2 a los módulos de los campos en el vacío, en el dieléctrico 1 y en el dieléctrico 2, respectivamente, los campos resultantes en el capacitor, cuando se introducen los dieléctricos, son:

$$\text{Campo en el dieléctrico 1: } E_{D1} = E_o - E_1$$

$$\text{Campo en el dieléctrico 2: } E_{D2} = E_o - E_2$$

De acuerdo a la relación (5.12):

$$E_o - E_1 = \frac{E_o}{\kappa_1} \quad E_o - E_2 = \frac{E_o}{\kappa_2}$$

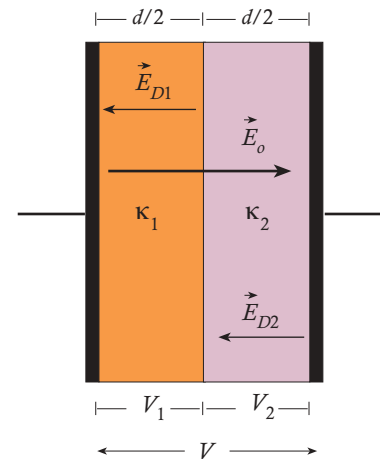


Fig. 5.18 Capacitor para el ejemplo 5.9.

Sabemos, también, que el campo y el potencial están relacionados por la expresión $V = E \cdot d$. Luego:

$$V_1 = E_{D1} \cdot \frac{d}{2} = \frac{E_o}{\kappa_1} \cdot \frac{d}{2} \quad V_2 = E_{D2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{E_o}{\kappa_2} \cdot \frac{d}{2} \text{ J}$$

Como $V = V_1 + V_2$:

$$V = \left(\frac{E_o}{\kappa_1} + \frac{E_o}{\kappa_2} \right) \cdot \frac{d}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{E_o d}{2}$$

Pero $E_o d$ es la diferencia de potencial, V_o , sin dieléctrico. Entonces:

$$V = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{V_o}{2}$$

Por definición, $C = Q_o / V$:

$$C = \frac{Q_o}{V} = \frac{Q_o}{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{V_o}{2}} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \frac{Q_o}{V_o} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_o$$

La capacitancia con los dos dieléctricos es, entonces:

$$C = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_o$$

Es interesante observar que el mismo resultado ha podido obtenerse si consideramos que, al introducir los dos dieléctricos, la estructura resultante corresponde a la de dos capacitores conectados en serie, tal como se muestra en la fig. 5.19. Para esos dos capacitores puede escribirse:

$$C_1 = \epsilon_1 \frac{A_1}{d_1} = \frac{A}{d/2} = 2\epsilon_1 \frac{A}{d}$$

$$C_2 = \epsilon_2 \frac{A_2}{d_2} = \frac{A}{d/2} = 2\epsilon_2 \frac{A}{d}$$



Fig. 5.19 El capacitor de la fig. 5.17 puede considerarse formado por dos capacitores en serie. Ejemplo 5.9.

De acuerdo con la relación (5.11):

$$\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} \quad \kappa_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_o} \quad \kappa_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_o}$$

Las expresiones de las capacitancias nos quedan como:

$$C_1 = 2\kappa_1 \epsilon_o \frac{A}{d} \quad C_2 = 2\kappa_2 \epsilon_o \frac{A}{d}$$

Como se trata de dos capacitores en serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

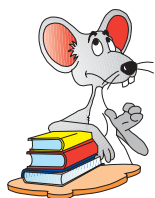
Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 :

$$C = \frac{2\kappa_1 \epsilon_o \frac{A}{d} \cdot 2\kappa_2 \epsilon_o \frac{A}{d}}{2\kappa_1 \epsilon_o \frac{A}{d} + 2\kappa_2 \epsilon_o \frac{A}{d}} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \epsilon_o \frac{A}{d}$$

Pero $C_o = \epsilon_o \frac{A}{d}$, por lo que podemos escribir:

$$C = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} C_o$$

que es el mismo resultado anterior.



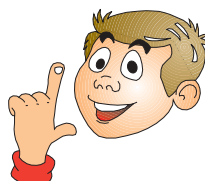
PIENSA Y EXPLICA



- 5.1** ¿Qué es un capacitor? ¿Qué es capacitancia? Dibuja el diagrama básico de un capacitor, explicando sus partes.
- 5.2** ¿De qué factores depende la capacitancia? Escribe la fórmula que la define. ¿En qué unidades se expresa?
- 5.3** Deduce la fórmula de la capacitancia para un capacitor plano.
- 5.4** Escribe las fórmulas para calcular la capacitancia de capacitores cilíndrico y esféricos. ¿Cómo se obtiene la capacitancia de un capacitor esférico?
- 5.5** ¿Qué es un dieléctrico? Explica cuáles son sus efectos en un capacitor. ¿Qué es la constante dieléctrica?
- 5.6** Explica cómo la introducción de un dieléctrico entre las armaduras de un capacitor afecta a la diferencia de potencial, al campo y a la capacitancia.
- 5.7** ¿Qué es la resistencia dieléctrica? ¿Cómo está relacionada con el máximo voltaje que puede aplicarse entre las armaduras de un capacitor?
- 5.8** ¿Por qué se dice que un capacitor almacena energía? ¿Cómo tiene lugar este proceso?
- 5.9** Deduce la fórmula que permite calcular la energía almacenada en un capacitor.
- 5.10** ¿Cuándo se dice que dos o más capacitores están conectados en serie o en paralelo?
- 5.11** Si se conectan en serie dos capacitores de distintas capacitancias cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: **a)** El capacitor mayor almacenará mayor carga. **b)** El capacitor mayor tendrá mayor potencial. **c)** La carga en cada capacitor es la misma. **d)** El capacitor mayor almacena mayor energía.
- 5.12** Si se conecta un capacitor plano a una fuente externa de voltaje constante y se incrementa la separación de las placas, ¿aumenta o disminuye el campo eléctrico entre las placas?
- 5.13** Explica por qué es peligroso tocar los terminales de un capacitor cargado.
- 5.14** Explica qué sucede en el interior de un dieléctrico cuando se sitúa entre las placas de un capacitor.
- 5.15** Explica qué sucede si se conecta un capacitor plano a una fuente externa de voltaje y, estando ésta conectada, se coloca entre sus placas un dieléctrico. ¿Cómo cambia el campo, el voltaje y la carga en el capacitor?
- 5.16** Si se tienen dos capacitores cargados y se conectan en paralelo, ¿qué sucede con la carga y la diferencia de potencial entre las armaduras de ambos?
- 5.17** Si se tienen dos capacitores cargados y se conectan en serie, ¿qué sucede con la carga y la diferencia de potencial entre las armaduras de ambos?



PROBLEMAS



- 5.1** ¿Qué cantidad de carga fluye a través de una batería de 24 V, cuando se le conecta por largo tiempo a los bornes de un capacitor de 100 pF?
- 5.2** Un capacitor plano se conecta a una pila de 9 V. Si sus placas están separadas 2 mm y su área es de $0,4 \text{ cm}^2$, a) ¿Cuál es su capacitancia? b) ¿Qué carga almacena? c) ¿Qué energía almacena?
- 5.3** Dos objetos metálicos tienen cargas de $+100 \text{ pC}$ y -100 pC , lo que da lugar a una diferencia de potencial entre ellos de 20 V. a) ¿Cuál es la capacitancia del sistema. b) Si las cargas aumentan a $+200 \text{ pC}$ y -200 pC , ¿cuál es el valor de la nueva capacitancia? ¿Cuál es ahora la diferencia de potencial entre ellos?
- 5.4** Se carga una esfera hasta un potencial de 900 V. Si adquiere una densidad superficial de carga de $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, determina el radio de la esfera.
- 5.5** Un capacitor plano tiene una capacitancia de $25 \text{ }\mu\text{F}$. Si se conecta a una fuente externa de 12 V, ¿qué carga se acumula en sus placas?
- 5.6** El campo producido por una esfera metálica cargada, de 10 cm de radio a una distancia de 30 cm de su centro, es de $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. a) ¿Cuál es su capacitancia? b) ¿Cuál es su densidad superficial de carga?
- 5.7** Se desea construir un capacitor plano de valor 3 pF con placas separadas 0,5 mm. ¿Cuál debe ser el área de las placas?
- 5.8** Las placas de un capacitor plano tienen un área de $0,5 \text{ cm}^2$ y una separación de 1 mm. Si se conectan a una batería de 12 V, determina: a) La capacitancia. b) El campo eléctrico entre las placas. c) La carga en las placas. d) La densidad superficial de carga.
- 5.9** Se desea construir un capacitor con placas paralelas circulares separadas una distancia de 2 mm. Si se espera una diferencia de potencial entre las placas es de 6.000 V y una carga de $0,5 \text{ }\mu\text{C}$, determina el radio de las placas.
- 5.10** Determina la capacitancia de un capacitor esférico de radios interno y externo iguales a 5 y 10 cm, respectivamente.
- 5.11** Un cable coaxial de 5 m de largo tiene conductores interno y externo de radios 1 mm y 3 mm. Si el espacio entre los conductores está lleno con teflón, determina el valor de su capacitancia.
- 5.12** Un condensador plano tiene un área y una separación de placas de 100 cm^2 y 0,2 mm. ¿Cuál es su capacitancia?
- 5.13** Un capacitor plano tiene una separación entre placas de 1 mm y el área de las mismas es de 200 cm^2 . Sin dieléctrico entre las placas, se le aplica una fuente externa de 100 V y luego se le desconecta. a) Determina el campo eléctrico, la carga y la energía almacenada. b) Si se le inserta una lámina de papel entre las placas, determina el campo eléctrico, la carga y la diferencia de potencial bajo estas nuevas condiciones.

5.14 Un capacitor de $1\ \mu\text{F}$ se carga hasta un voltaje $40\ \text{V}$ y luego se conecta en paralelo con otro capacitor de $10\ \mu\text{F}$. ¿Qué carga adquiere cada capacitor?

5.15 Un capacitor cilíndrico con un dieléctrico de mica ($\kappa = 4$) tiene una capacitancia de $20\ \text{pF}$ y su longitud es de $4\ \text{cm}$. Si el radio del conductor externo es de $2\ \text{cm}$, ¿cuál debe ser el radio del conductor interno?

5.16 Un capacitor plano, con sus placas separadas $1\ \text{cm}$, con una capacitancia de $5\ \mu\text{F}$, se conecta a una fuente de $20\ \text{V}$.
a) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor?
b) Si se desconecta la batería y las placas se alejan hasta alcanzar una distancia de $2\ \text{cm}$, ¿qué energía se almacena en el capacitor?

5.17 Dos capacitores de capacitancia $C_1 = 2\ \mu\text{F}$ y $C_2 = 10\ \mu\text{F}$ están conectados en serie a una batería de $12\ \text{V}$. Se desconectan de la batería y se conectan en paralelo uniendo sus lados positivos y negativos.
a) ¿Cuál es la diferencia de potencial después de conectarlos en paralelo?
b) ¿Qué energía se pierde al conectarlos en paralelo?

5.18 **a)** Determina la capacitancia equivalente de los capacitores conectados según la fig. 5.20. **b)** ¿Cuál es la carga en cada capacitor? **c)** ¿Qué energía almacenan los capacitores?

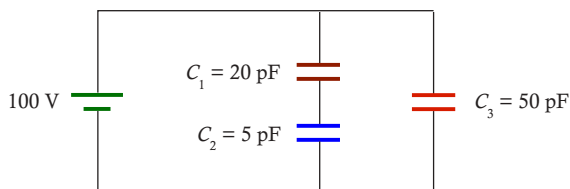


Fig. 5.20 Problema 5.18.

5.19 Para los circuitos de capacitores de la fig. 5.21 determina: **a)** La capacitancia equivalente. **b)** La carga en cada capacitor. **c)** La energía almacenada en cada capacitor.

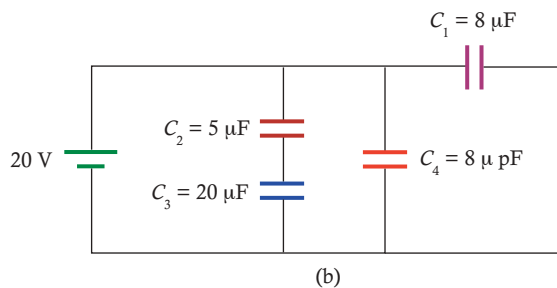
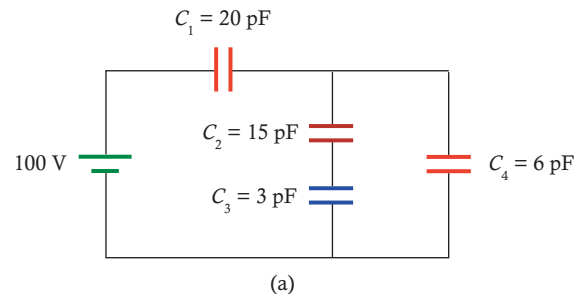


Fig. 5.21 Problema 5.19.

5.20 Se coloca un dieléctrico entre las placas de un capacitor que ocupa la mitad del área de las placas como se muestra en la fig. 5.22. La otra mitad del área está ocupada por aire. Determina la capacitancia equivalente.

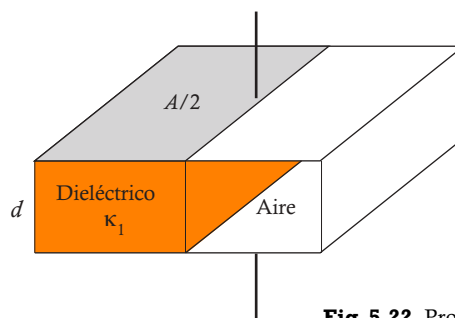
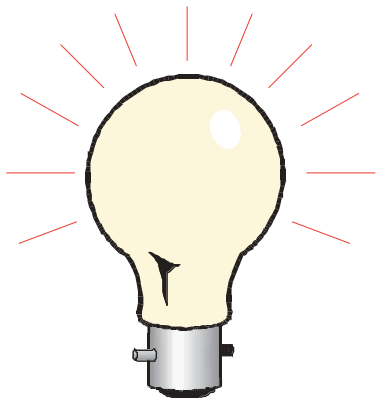


Fig. 5.22 Problema 5.20.



CAPÍTULO 6

CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA

6.1 CORRIENTE ELÉCTRICA

Una corriente eléctrica es un flujo de cargas eléctricas. Aunque es usual relacionar la corriente eléctrica con los materiales conductores, la misma tiene lugar, en mayor o menor medida, en diversos medios. Las cargas eléctricas en movimiento pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo del medio donde se desplazan. En los metales, estas cargas son electrones, partículas elementales que son fácilmente inducidas a moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. Los electrones de la capa externa de los átomos en un metal pueden fácilmente desplazarse de un átomo a otro y su movilidad, en ausencia de un campo eléctrico, da lugar a un movimiento errático a través de la red cristalina, tal como se sugiere en la fig. 6.1(a). Bajo estas condiciones, el número de electrones que atraviesa el área A hacia la derecha no necesariamente es distinto al que la atraviesa hacia la izquierda. De hecho, puede probarse que, en promedio, estos dos números coinciden. Esto se expresa afirmando que el flujo neto de cargas a través del área A es nulo.

Otra situación ocurre cuando se aplica una diferencia de potencial entre los terminales del conductor, tal como se indica en la fig. 6.1(b). En este caso, se crea un campo eléctrico en el interior del conductor que obliga a los electrones a desplazarse hacia la derecha. Los electrones atraviesan el área A y se origina una corriente eléctrica.

En mayor o menor grado, todos los materiales sólidos son capaces de conducir una corriente eléctrica; sin embargo, los metales, con grandes cantidades de electrones libres presentan óptimas características conductivas. En otras sustancias, como los llamados *semiconductores*, la corriente se produce en base a portadores de carga negativos y positivos, correspondientes a *electrones* y *huecos*, respectivamente.

En las soluciones conductoras, generalmente compuestas por agua, a la cual se añaden sales

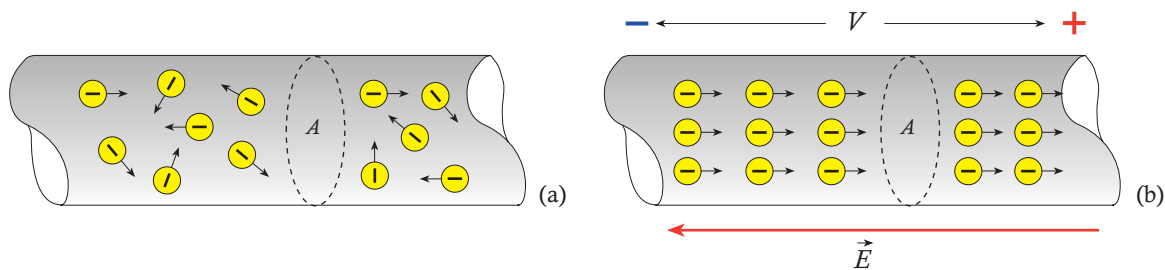


Fig. 6.1 a) En ausencia de un campo eléctrico en el interior de un conductor, la corriente promedio a través del área A es cero. b) Cuando se aplica un voltaje entre los terminales del conductor, el campo eléctrico generado obliga a los electrones a moverse en dirección contraria al campo.

inorgánicas que le confiere la propiedad de producir una corriente eléctrica, la conducción tiene lugar mediante iones cargados positiva y negativamente. A los primeros se les denomina *cationes*, mientras que los segundos reciben el nombre de *aniones*. A la sustancia formada por el agua y las sales inorgánicas se le conoce como *electrolitos* y la cantidad de corriente que se produce dependerá tanto de la cantidad de iones presentes, como de la movilidad de los mismos en la solución. A medida que las sales presentes en la solución aumenta, también lo hace la conductividad. Este efecto puede incrementarse hasta que la solución se satura de iones, se restringe la movilidad de los mismos y la conductividad disminuye. Algunas sustancias se ionizan más que otras y son, por tanto, mejores conductores de la corriente eléctrica.

Cuando una solución electrolítica es sometida a la acción de un voltaje, ver fig. 6.2, se produce un campo eléctrico dentro de la misma que da lugar a dos corrientes distintas: los cationes siguen la dirección del campo, mientras que los aniones se mueven en dirección opuesta. Se establecen, así dos corrientes de sentido opuesto.

En muchos gases, encerrados en recipientes apropiados, también es posible obtener corrientes de di-

recciones opuestas al aplicarles una diferencia de potencial. Cuando el potencial alcanza valores apropiados, el gas se ioniza, creando partículas con cargas negativas y positivas que se mueven bajo la acción de un campo eléctrico.

6.2 EFECTOS DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

El flujo de cargas a través de un conductor trae consigo varios efectos que, usualmente, están relacionados entre sí. Entre los más relevantes podemos citar:

a) *Efectos luminosos*: comúnmente tiene lugar cuando la corriente circula por un elemento conductor produciéndole un aumento de temperatura que, a su vez, da lugar a la producción de luz visible. Es el caso típico de los bombillos y otros artefactos luminosos usados en el hogar. Para que se produzca marcadamente el efecto, el elemento calefactor se encierra en un recipiente de vidrio con un alto grado de vacío. En otros casos, como en las lámparas fluorescentes, el efecto luminoso tiene lugar al producirse una descarga en un gas inerte, tal como el gas neón, encerrado en un recipiente adecuado. En ambos casos hay radiación de calor, siendo ésta mayor en los bombillos incandescentes que en las lámparas fluorescentes.

b) *Efectos caloríficos*: con excepción de la conducción a muy bajas temperaturas, el paso de cargas eléctricas por un material conductor genera calor en forma significativa. En algunos artefactos específicos, tales como tostadoras, planchas y calentadores eléctricos, este efecto se hace más evidente. En los mismos, la energía eléctrica es convertida en energía calórica, que se usa convenientemente en el hogar.

c) *Efectos químicos*: varias son las manifestaciones de la corriente eléctrica en el campo de la Química. La descomposición de soluciones electrolíticas en pilas y baterías, los recubrimientos metálicos, tales como cromados, dorados, etc, son aplicaciones importantes de las corrientes eléctricas.

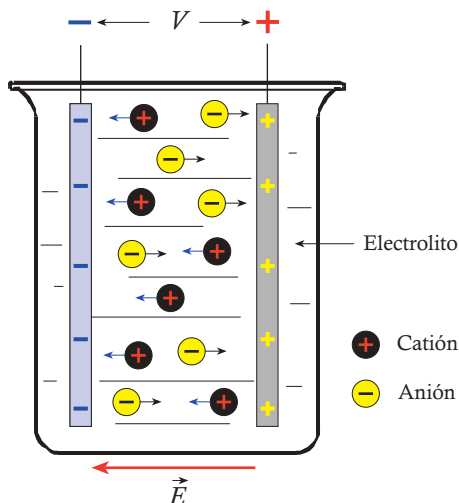


Fig. 6.2 En una solución electrolítica tiene lugar un doble movimiento de cargas. Hay una corriente en un sentido formada por iones positivos y una corriente en sentido contrario formada por iones negativos

d) *Efectos magnéticos*: Toda movimiento de cargas eléctricas tiene asociado un efecto magnético. Una aplicación importante de este efecto lo encontramos en los conocidos electroimanes, usados para levantar grandes objetos metálicos pesados. Otra aplicación moderna es la llamada *magnetoterapia*, donde se utilizan los efectos magnéticos de la corriente como mecanismos terapéuticos.

e) *Efectos dinámicos*: la interacción de la corriente eléctrica con campos magnéticos da origen a movimientos mecánicos. Esta interacción es la pieza fundamental de los motores eléctricos, base del desarrollo industrial de la humanidad.

6.3 FUENTES DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Una fuente de energía eléctrica es un dispositivo capaz de generar un voltaje o una corriente eléctrica. Diversas son las alternativas que dan lugar al movimiento de partículas cargadas en un medio conductor. A continuación discutimos algunas de ellas.

a) *Termoelectricidad*: cuando se dispone de grandes cantidades de calor, se puede obtener electricidad mediante el uso de *plantas de vapor*. El calor se utiliza para generar vapor, el cual, a su vez, da vueltas a una turbina. Esta última acciona un generador para producir electricidad. Este tipo de instalación es muy común en grandes concentraciones de población.

Otra manera muy simple de generar electricidad, sin que intervengan partes en movimiento, es mediante el uso de *termocuplas* o *pares termoelectrónicos*. Las termocuplas basan su funcionamiento en los efectos eléctricos que ocurren en las uniones entre diferentes metales, tal como se muestra en la fig. 6.3. Un conductor formado por una aleación de nickel-cadmio y uno de nickel-cromio se unen en un extremo, mientras que los extremos libres de ambos se conectan a un detector de voltaje, digamos, un voltímetro. Si se calienta la unión, el voltímetro indicará una lectura. Para el caso mostrado, una temperatura de 300°C en la unión, genera un voltaje de $2,2\text{ mV}$. Diversas son las aleaciones usadas en las termocuplas, dependiendo del tipo de aplicación. Los satélites interplanetarios que viajan a lejanos planetas como Saturno y Júpiter, no pueden hacer uso de la

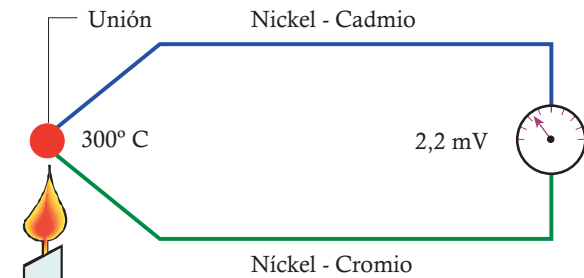


Fig. 6.3 Generación de una corriente por efecto termoelectrico, mediante una termocupla formada por la unión de dos conductores distintos.

energía solar (¿Por qué?) para producir electricidad. En su lugar, utilizan *generadores termoelectrónicos de radioisótopos* para obtener la energía de operación. Un material radioactivo, como el plutonio, se utiliza para generar calor, que aplicado a termocuplas, lo convierten en electricidad. Los generadores termoelectrónicos de radioisótopos no poseen partes móviles, aumentando la confiabilidad del sistema y son capaces de generar electricidad por muchos años.

b) *Piezoelectricidad*: algunos materiales no conductores tienen la propiedad de producir un voltaje cuando entre sus superficies se aplica un esfuerzo mecánico. Este efecto, conocido como efecto piezoelectrico, fue descubierto por Pierre Curie en 1883 y es típico de ciertos cristales entre los cuales destacan el cuarzo y la sal de Rochelle. De manera inversa, cuando estos cristales son sometidos a un voltaje externo, producen vibraciones, producto de la distorsión mecánica que experimentan.

Los materiales piezoelectrónicos son usados en dispositivos para convertir esfuerzos mecánicos en voltajes. Están presentes en micrófonos, en osciladores y filtros electrónicos, relojes, transmisores de radio, equipos de ultrasonidos, computadores, equipos de sonar y un gran número de aplicaciones científicas e industriales. En años recientes se han desarrollado materiales cerámicos como titanato de bario, titanato de plomo y zirconato de plomo que exhiben la propiedad de piezoelectricidad y son ampliamente usados en transductores de ultrasonido.

En la fig. 6.4 se muestra un esquema de un cristal piezoelectrico sometido a la acción de un esfuerzo

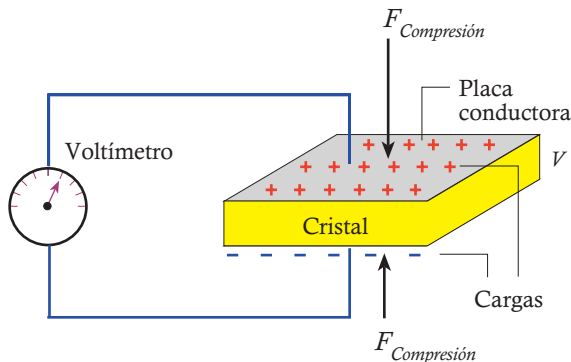


Fig. 6.4 Generación de una corriente por efecto piezoeléctrico mediante un cristal que, sometido a una fuerza de compresión, da lugar a la aparición de cargas en sus caras paralelas.

mecánico. Cuando se comprime o se somete a tensión, el cristal acumula cargas en sus caras opuestas, tal como lo hace un capacitor. Estas cargas pueden dar origen a una corriente a través de un circuito externo.

c) *Efecto fotoeléctrico*: este fenómeno está referido a la emisión de electrones de una superficie metálica como resultado de un haz de luz incidente sobre dicha superficie. Tal como se puede ver en la fig. 6.5, los electrones expulsados de sus órbitas por los fotones incidentes, pueden establecer una corriente eléctrica en conductores externos conectados a las placas metálicas.

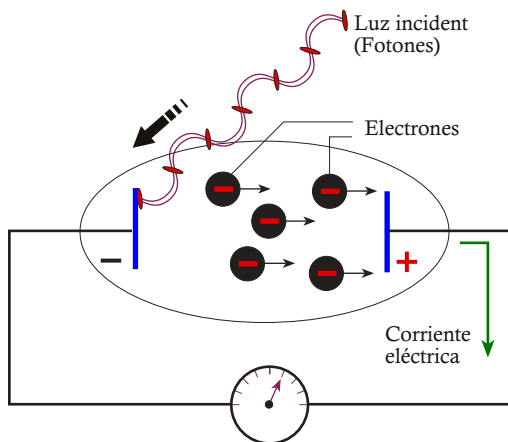


Fig. 6.5 Generación de una corriente por efecto fotoeléctrico. Los fotones ceden su energía para desprender los electrones de la lámina metálica. Los electrones desprendidos crean una corriente eléctrica.

d) *Acción química. Baterías*: las baterías son dispositivos que transforman energía química en energía eléctrica. Su uso se ha expandido universalmente por ser parte de los sistemas electrónicos portátiles. Las baterías se presentan en una gran variedad de formas y tamaños, desde las más pequeñas utilizadas en los circuitos de relojes o computadoras, hasta las más grandes usadas en submarinos, vehículos o sondas espaciales.

La invención de la batería se debe a Alessandro Volta, quien en 1800 realizó experimentos que resultaron en la generación de una corriente eléctrica proveniente de la reacción química entre metales de distinta naturaleza. La pila voltaica original constaba de discos alternados de zinc y de plata, separados por papel impregnado en una solución salina, tal como se señala en la fig. 6.6.

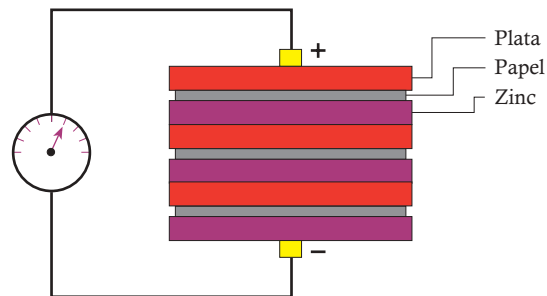


Fig. 6.6 Pila voltaica. Entre los discos de plata y zinc se coloca un papel impregnado de una solución salina. El voltaje generado depende del número de discos utilizados.

Durante la primera mitad del siglo XIX, se llevaron a cabo experimentos que envolvían gran variedad de elementos metálicos y electrolíticos. En 1860, el francés George Leclanche desarrolló una batería que constaba de placas metálicas de carbón y zinc, inmersos en un electrolito. El desarrollo original fue mejorado en los años siguientes con la sustitución del electrolito líquido por una pasta electrolítica (cloruro de amonio y dióxido de manganeso), la cual permitía ensamblar la batería como una unidad sellada. Este diseño, la batería seca de carbón-zinc de Leclanche, todavía se mantiene actualmente como la principal fuente de energía portátil.

Otras variedades de pilas incluyen las alcalinas, formadas por zinc, dióxido de manganeso e

hidróxido de potasio como electrolito, las pilas de níquel-cadmio que usan estos metales como conductores e hidróxido de potasio como electrolito.

No entraremos en detalle a considerar las reacciones químicas que ocurren en el interior de una batería. Sólo mencionaremos que cuando una batería es insertada en un circuito eléctrico un flujo de electrones tiene lugar en la parte externa del mismo. Dentro de la batería, la carga fluye en la forma de iones que son transportados dentro del electrolito desde un terminal al otro. La fig. 6.7 representa esquemáticamente la que sucede. A una batería se le representa por el símbolo $\text{---}| \text{---}|$, donde la raya vertical más grande corresponde al terminal positivo y la más pequeña al terminal negativo.

Cuando una batería se conecta a una carga externa, en la fig. 6.7 un bombillo, fluyen corrientes tanto en el exterior como en el interior de la batería. En el exterior fluyen electrones, que pasan a través de la carga externa. Internamente, hay una corriente de iones que son llevados de un electrodo hasta el otro. El electrodo positivo recibe electrones, los cuales interactúan con el material activo de dicho electrodo para generar una reacción química de reducción que mantiene el flujo de cargas a través del electrolito y hacia el electrodo negativo. En este último electrodo tiene lugar una reacción química de oxidación, la cual resulta en el suministro de

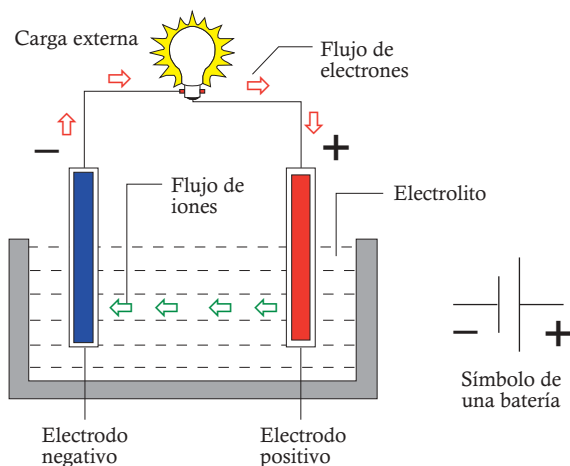


Fig. 6.7 Componentes básicos de una batería. En el circuito externo fluyen electrones, mientras que dentro de la batería hay una corriente de iones.

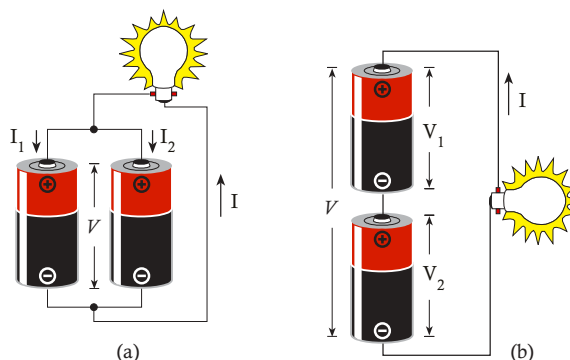


Fig. 6.8 (a) Baterías conectadas en paralelo: la corriente en la carga externa es la suma de las corrientes proporcionada por cada una de las baterías. El voltaje es el mismo en la carga. (b) Baterías conectadas en serie: el voltaje en la carga es la suma de los voltajes de las baterías. La corriente es la misma en todo el circuito.

electrones a ser transportados en el circuito externo. Por cada electrón que se genera en el electrodo negativo un electrón se consume en el electrodo positivo. A medida que el proceso continúa, los materiales activos que forman los electrodos se deterioran, las reacciones químicas disminuyen y la batería se descarga. Es decir, ya no es capaz de mantener la corriente eléctrica. En algunas baterías, conocidas como *baterías recargables*, es posible reponer la energía que se pierde por efecto del uso. En este caso, mediante un circuito externo, se repone la capacidad de la batería para renovar las reacciones químicas que tienen lugar en su interior.

Es importante decir que la frecuencia con que se producen los electrones en la batería depende de la velocidad de la reacción química que se produce internamente. Esta velocidad está relacionada con la llamada *resistencia interna* de la batería.

En algunos casos, es necesario conectar las baterías en paralelo o en serie. En el primer caso, con el mismo valor de voltaje, se requiere obtener una corriente mayor a la que suministraría una sola batería, mientras que en el segundo caso, se desea obtener un voltaje mayor al de una batería, manteniendo el valor de la corriente en el circuito externo. Ambas situaciones se muestran en la fig. 6.8. Es necesario mencionar que en el caso de baterías en paralelo, los voltajes de las mismas deben ser iguales. De otra forma la batería de más bajo voltaje absorbería corriente de la otra.

e) *Acción magnética*: cuando un campo se produce una interacción entre un circuito eléctrico cerrado en movimiento con una campo magnético, es posible generar una corriente eléctrica. Los detalles de este proceso se estudiarán en el próximo capítulo.

6.4 LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Ya mencionamos que *una corriente eléctrica es un flujo de cargas*. A fin de obtener una expresión cuantitativa de este flujo, consideremos la fig. 6.9.

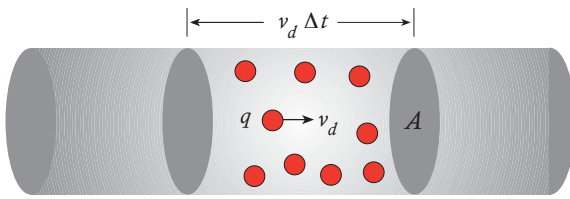


Fig. 6.9 Modelo usado para definir la intensidad de corriente.

Supongamos que dentro del conductor metálico hay un promedio de n electrones por unidad de volumen y que, también en promedio, la velocidad de desplazamiento de los electrones es igual a v_d . La distancia promedio recorrida por un electrón en un intervalo de tiempo Δt está dada por:

$$\Delta x = v_d \Delta t$$

El volumen ocupado por los electrones durante este tiempo es:

$$\Delta \text{Volumen} = A \Delta x = A v_d \Delta t$$

El número de electrones que cruzan el área A en el tiempo Δt se obtiene multiplicando el volumen por n , que es el número de electrones por unidad de volumen:

$$\text{Número de electrones} = n A v_d \Delta t$$

La carga total, ΔQ , que cruza el área A se determina multiplicando el número de electrones por la carga de cada electrón (q):

$$\Delta Q = q n A v_d \Delta t$$

La intensidad de corriente es la carga total que cruza la superficie A del conductor en la unidad de tiempo:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q A v_d \quad (6.1)$$

La relación anterior establece que la intensidad de corriente en un conductor es proporcional al número de portadores de cargas libres, en este caso electrones, a la superficie transversal del conductor y a la velocidad media de los electrones en el medio conductor. La relación (6.1) es completamente general y puede aplicarse cuando el medio conductor es un electrolito o cualquier otra sustancia capaz de transportar cargas libres.

A la unidad fundamental de intensidad de corriente, se le denomina *ampere* y se le denota por la letra A . Según (6.1) esta unidad se obtiene dividiendo la carga total que atraviesa una superficie determinada entre el tiempo que tarda esa carga en atravesarla. Más formalmente, se dice que una corriente de 1 amperio es equivalente a 1 carga de 1 coulomb pasando a través de una superficie en un tiempo de 1 segundo. Es decir:

$$1 \text{ ampere} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ segundo}} \quad (6.2)$$

A menudo, en la práctica se utilizan submúltiplos de la unidad fundamental, tales como el miliampere ($10^{-3} A$) y el microampere ($10^{-6} A$).

El término v_d , de la relación 6.1, corresponde a la velocidad promedio de los electrones en el metal y se le conoce como *velocidad de arrastre*. Como estudiamos en la sección 6.1, los portadores de carga que conforman la corriente eléctrica se mueven al azar cuando no son perturbados por un campo eléctrico. En la presencia de un campo, las partículas de carga se orientan de acuerdo con el mismo, pero su movimiento no deja de estar signado por una serie de choques entre ellos. De allí que la velocidad de arrastre resulte muy pequeña y los electrones se muevan distancias muy cortas en cada segundo. Los valores típicos de v_d están en el orden de 0,01 mm/s. Es decir, en promedio, un electrón se mueve 0,01 milímetros cada segundo. Como puede deducirse, esta velocidad de movimiento no justifica la observación experimental del movimiento del efecto eléctrico. Por ejemplo, cuando encendemos una luz

por medio de un interruptor, notamos que la misma se enciende inmediatamente. En realidad, la propagación del efecto tiene lugar a la velocidad de la luz, aun cuando el movimiento de los electrones tiene lugar a una velocidad muy baja. En otras palabras, la onda que se genera al producirse el choque de un electrón contra otros, se propaga a la velocidad de 300.000 km/s, a pesar que la velocidad promedio de los electrones, al moverse dentro de la estructura cristalina del conductor, puede ser bastante pequeña.

Ejemplo 6.1

En la mayoría de los casos, el cableado de las instalaciones eléctricas residenciales está hecho en base a cables de cobre, el cual es un buen conductor y su costo es relativamente bajo. El átomo de cobre, como puede verse en el modelo de la fig. 6.10, posee 29 protones y 29 electrones, de allí que su número atómico sea 29. La conducción eléctrica tiene lugar cuando los electrones de la última capa se desprenden con facilidad de la estructura atómica y pueden moverse en la estructura metálica. En el cobre, 2 electrones se mueven en su capa más interna, 8 en la segunda capa, 18 en la tercera capa y 1 en la última capa. Es este último electrón el que le da al cobre su característica de buen conductor, puesto que puede soltarse sin dificultad de la configuración atómica. a) Conocidos el peso atómico del cobre

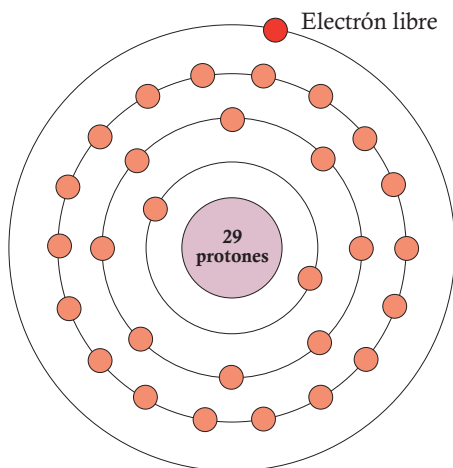


Fig. 6.10 Estructura atómica del cobre. Ejemplo 6.1.

(63,5 g/mol) y su densidad ρ (8,95 g/cm³), determina la velocidad de arrastre de los electrones en un alambre de cobre de 1 mm de radio, cuando la corriente que fluye en el alambre es de 1 A. b) ¿Cuánto tarda, en promedio, un electrón en recorrer un cable de longitud 2 m? c) ¿Cuánto tiempo tarda en sentirse el efecto de conducción desde un extremo a otro del cable?

Solución

a) Primero, debemos recordar que un mol de cualquier sustancia posee un número de átomos dado por el *número de Avogadro* ($6,02 \cdot 10^{23}$ átomos). El volumen ocupado por 63,5 g está dado por:

$$Volumen = \frac{m}{\rho} = \frac{63,5 \text{ g}}{8,95 \text{ g/cm}^3} = 7,09 \text{ cm}^3$$

El número de electrones por unidad de volumen es:

$$n = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ electrones}}{7,09 \text{ cm}^3} = 8,49 \cdot 10^{22} \frac{\text{electrones}}{\text{cm}^3}$$

El área del conductor cilíndrico está dada por:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$$

Los dos valores anteriores pueden expresarse de la siguiente manera:

$$n = 8,49 \cdot 10^{28} \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3} \quad A = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Según la relación (6.1):

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{1}{(8,49 \cdot 10^{28}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (3,14 \cdot 10^{-6})}$$

$$v_d = 0,0234 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 0,0234 \text{ mm/s}$$

El resultado anterior significa que cada segundo un electrón recorre, en promedio, 0,0234 mm.

b) De acuerdo con la fórmula de velocidad:

$$t = \frac{d}{v_d} = \frac{2 \text{ m}}{0,0234 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}} = 85.470 \text{ s} = 23,74 \text{ h}$$

Es decir, que para cubrir la distancia de 2 m, un electrón tarda en promedio ¡casi 1 día!

c) Como el efecto de propagación de la onda electromagnética se da a una velocidad de $3 \cdot 10^8$ m/s, se tiene:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{2 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,67 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Notable la diferencia con el resultado anterior, ¿no?

6.5 CORRIENTE CONTINUA. CORRIENTE VARIABLE.

Cuando las cargas fluyen en un conductor, lo hacen bajo la influencia de la fuerza que un campo eléctrico genera en el mismo. Si el campo es uniforme, su magnitud y dirección se mantienen constantes dentro del conductor. Bajo estas condiciones, los portadores de carga se mueven en la misma dirección del campo, impulsados por la fuerza ejercida por éste y se habla de una *corriente constante o continua* en el tiempo. Esta es la forma de corriente típica en una red eléctrica conectada a una batería.

Al contrario de una corriente continua, una *corriente variable* es aquella creada por un campo eléctrico que varía con el tiempo. En este caso, el flujo de cargas dependerá del valor del campo eléctrico a cada instante. Un caso particular de corriente variable es la llamada *corriente alterna*, en la cual el sentido del campo eléctrico se invierte en forma periódica cada cierto intervalo de tiempo (período), dando lugar a desplazamientos de carga en sentidos contrarios dentro del conductor.

En la fig. 6.11 se muestran las gráficas de corrientes continua, variable y alterna. Como puede verse, el valor I de la corriente continua, permanece constante con t . Cuando se trata de una corriente variable, la cual puede ser alterna o no, la corriente, representada usualmente como i (i minúscula), adquiere valores distintos a medida que transcurre el tiempo. Para una corriente alterna, los valores de i son positivos en un primer intervalo de tiempo y, luego, en un segundo intervalo de tiempo, de igual duración que el anterior, los valores de i son negativos. La curva, en este caso, es simétrica con relación a cualquier eje vertical. El voltaje que llega a nuestros hogares desde la red de distribución de energía eléctrica es

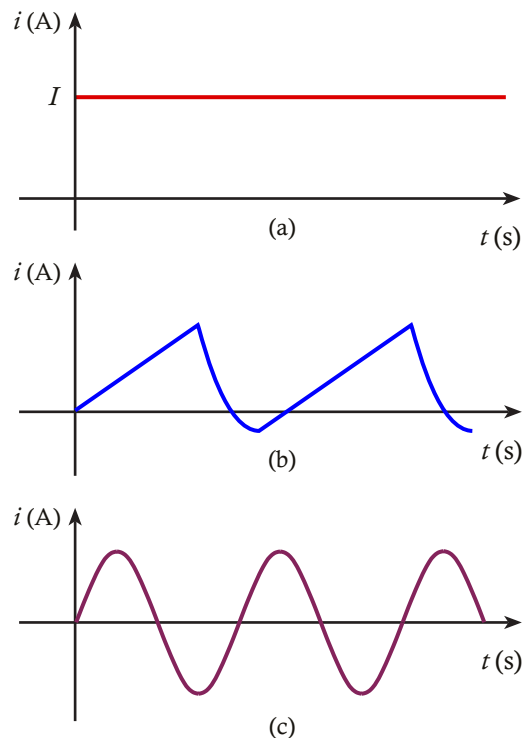


Fig. 6.11 a) Corriente continua. b) Corriente variable. c) Corriente alterna.

de naturaleza sinusoidal, tal como la que mostramos en la fig. 6.11. Es posible otras formas de corrientes alternas, sobre todo en los comunes circuitos electrónicos de nuestros días. En las secciones siguientes, trataremos únicamente con corrientes de naturaleza continua, aun cuando muchos de los conceptos desarrollados aplican, igualmente, a corrientes variables.

6.6 DENSIDAD DE CORRIENTE. CONDUCTIVIDAD.

Consideremos un conductor metálico de área transversal A , como se presenta en la fig. 6.12. La *densidad de corriente* se define como el cociente de la intensidad de corriente I . Según la relación (6.1):

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \quad (6.3)$$

donde se supone que la corriente es constante y el área es perpendicular al flujo de portadores de carga. La densidad de corriente se expresa en A/m².

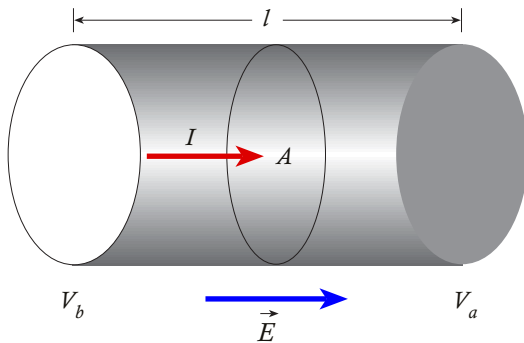


Fig. 6.12 La diferencia de potencial en los extremos crea un campo eléctrico que da lugar a un flujo de electrones en el conductor de longitud l y área transversal A . Este flujo corresponde a la corriente I . El sentido del flujo electrónico es opuesto al señalado en el dibujo. Por convención, se ha aceptado que la corriente eléctrica es un flujo de cargas positivas que, en este caso, se dirigen en la dirección señalada por la flecha roja.

Observa que en la fig. 6.12 la corriente tiene la dirección señalada por el campo eléctrico. Como ya sabemos de los capítulos anteriores, los electrones, por ser cargas negativas, se mueven en dirección contraria a la del campo eléctrico. Sin embargo, ha sido aceptado convencionalmente que la dirección de la corriente corresponde a un flujo de cargas positivas y, por tanto, la dirección del movimiento de los electrones es contrario a la dirección del movimiento de la corriente convencional.

En muchos casos prácticos, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico en el conductor, según lo establece la relación:

$$J = \sigma E \quad (6.4)$$

A la constante de proporcionalidad σ se le conoce como *conductividad eléctrica*, es característica para cada conductor y se expresa en amperios/voltios-metros (A/V-m).

Ejemplo 6.2

Un conductor de área transversal uniforme de $0,28 \text{ cm}^2$ admite una densidad de corriente de $4 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}^2$. ¿Qué tiempo se requiere para que un número de electrones igual al número de Avogadro pase por un punto cualquiera del conductor?

Solución

El número de Avogadro corresponde a $6,02 \cdot 10^{23}$ electrones. De acuerdo con la relación (6.3):

$$I = J \cdot A = (4 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,28 \cdot 10^{-4}) = 1,12 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

La carga contenida en el número de Avogadro es:

$$Q = (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (6,02 \cdot 10^{23}) = 9,63 \cdot 10^4 \text{ C}$$

Como $I = q/t$ se tiene:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{9,63 \cdot 10^4}{1,12 \cdot 10^{-7}} = 8,6 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

6.7 LEY DE OHM. RESISTENCIA.

La ley de Ohm se basa en la relación (6.4) y dice lo siguiente:

La relación J/E en muchos materiales, entre los cuales destacan la mayoría de los conductores, es constante e igual a la conductividad, σ , del material.

A los materiales que obedecen la ley de Ohm, se les conoce como materiales *óhmicos* o *resistivos*. Como la relación (6.4) es lineal, la gráfica representativa de J en función de E , es una línea recta. Es significativo destacar, que muchos elementos no lineales pueden ser considerados como materiales óhmicos cuando operan en una región restringida de su curva $J - E$.

Una forma más popular de la ley de Ohm, relaciona la corriente que circula por el conductor con el voltaje o diferencia de potencial aplicada en sus extremos. Para obtener una expresión cuantitativa de esta ley, observemos la fig. 6.12. La diferencia de potencial, V , está relacionada con el campo, E , y la longitud, l , del conductor, mediante la expresión:

$$V = E \cdot l \quad (6.5)$$

Según la relación (6.4):

$$J = \sigma \cdot E = \sigma \frac{V}{l} \quad (6.6)$$

Sustituyendo el valor de $J = I/A$ en la relación anterior:

$$\sigma \frac{V}{l} = \frac{I}{A} \quad (6.7)$$

Despejando el voltaje V de la expresión anterior:

$$V = \frac{l}{\sigma A} I \quad (6.8)$$

A la cantidad $\frac{l}{\sigma A}$ se le conoce como *resistencia eléctrica* y se le denota por la letra R . Entonces:

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad (6.9)$$

En función de la resistencia, (6.8) nos queda como:

$$V = R \cdot I \quad (6.10)$$

que es la forma más usual de la ley de Ohm. De la relación (6.9) podemos deducir la unidad SI de resistencia: como l se expresa en m, σ en A/V-m y A en m², se tiene:

$$\text{Unidades de } R: \frac{\frac{\text{m}}{\frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{m}} \cdot \text{m}^2}}{\text{A}} = \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

A la relación anterior entre voltios y amperios se le conoce como *ohm*, unidad fundamental de resistencia. Su símbolo es la letra griega Ω . *Un ohm es la resistencia de un material cuando, al aplicar una diferencia de potencial entre sus terminales, se produce una corriente de 1 ampere.*

Con frecuencia, en lugar de la conductividad, se utiliza su recíproco, la *resistividad* (ρ), en cuyo caso la fórmula (6.9) se convierte en:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (6.11)$$

Las unidades de la resistividad son ohm-m ($\Omega \cdot \text{m}$). De la expresión anterior para la resistencia, puede deducirse que ésta es una función de las características geométricas del conductor, puesto que

depende de su longitud y del área transversal que posee. Se ha de mencionar que la resistividad es una constante cuyo valor depende de la temperatura, haciendo, de esta manera, que la resistencia de un conductor sea una cantidad susceptible de variar con las fluctuaciones de temperatura. Esta variación se cuantifica mediante un coeficiente α que mide los cambios de ρ con la temperatura. En la tabla 6.1 se indican la resistividad de algunos materiales, así como el coeficiente de temperatura correspondiente.

Resistividad y Coeficiente de Temperatura a 20° C		
Material	Resistividad ($\Omega \cdot \text{m}$)	Coef. Temp ($1/^{\circ} \text{C}$)
Plata	$1,59 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Cobre	$1,68 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Aluminio	$2,65 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5,60 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Hierro	$9,71 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
Plomo	$22,0 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Platino	$11,0 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Nicromo	$100 \cdot 10^{-8}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
Carbono	$3,50 \cdot 10^{-5}$	$-0,5 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.1.

Como puede notarse de la tabla 6.1, la resistividad se calcula en base a una temperatura de 20 °C y, a partir de allí, se puede usar la siguiente expresión para determinar la resistividad a cualquier otra temperatura:

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha(T - 20^{\circ} \text{C})] \quad (6.12)$$

donde ρ_{20} es la resistividad a 20 °C.

Debemos enfatizar que la ley de Ohm se aplica únicamente a aquellos materiales que exhiben un comportamiento lineal en la relación voltaje - corriente. Muchos dispositivos utilizados en equipos electrónicos, básicamente diodos semiconductores y transistores, muestran un comportamiento no lineal y deben ser tratados mediante otras técnicas de análisis para establecer las relaciones entre voltajes y corrientes en los circuitos de los cuales forman parte.

La propiedad de resistencia eléctrica, aun cuando es inherente a cualquier material conductor y en muchos casos representa un obstáculo para la transmisión de la energía eléctrica de un punto a otro, en otras circunstancias es usada con ventaja para

obtener resultados que no estarían presentes sin su presencia. Este es el caso de los circuitos electrónicos, en los cuales se utilizan elementos conocidos como *resistores* cuyo papel es introducir en dichos circuitos valores precisos de resistencia. En otras aplicaciones, los resistores se utilizan para producir calor que permite calentar agua o alimentos (calentadores de agua, hornos, cocinas eléctricas, planchas, etc).

Los resistores se representan por el símbolo $\sim\wedge\sim$ y se construyen, básicamente de carbón y de hilos metálicos de alta resistividad (wolfranio, manganina, constantán). Los segundos se utilizan, fundamentalmente en circuitos de media y alta potencia. En la fig. 6.13. se muestra una resistencia de carbón. Las bandas a su alrededor establecen el valor de la resistencia en ohms y su precisión. Así, puede hablarse de una resistencia de valor nominal 10 k Ω y precisión 10%, lo que significa que el valor real puede estar en el rango 10 k $\Omega \pm 10\%$.

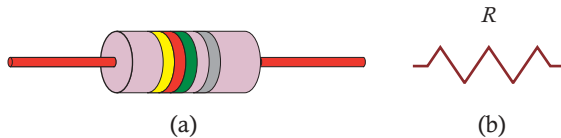


Fig. 6.13 a) Resistencia de carbón. b) Símbolo de resistencia.

Ejemplo 6.3

Un conductor de cobre tipo TW número 12 tiene un área transversal de 3,31 mm². **a)** Calcula la resistencia del conductor si su longitud es de 50 m. **b)** Si el conductor fuera de nicromo (una aleación de níquel y cromo), ¿cuál sería su resistencia?

Solución

a) De acuerdo a la tabla 6.1, la resistividad del cobre es $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. El valor de la resistencia del conductor de cobre se puede calcular usando (6.11):

$$R = \rho \frac{l}{A} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \frac{50 \text{ m}}{3,31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0,25 \Omega$$

b) Para el nicromo $\rho = 100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ y se tiene:

$$R = 100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \frac{50 \text{ m}}{3,31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 15,11 \Omega$$

De los resultados anteriores, se deduce que el nicromo tiene una resistencia casi 60 veces mayor que el cobre. Este último material se utiliza en artefactos calentadores en el hogar.

Ejemplo 6.4

El platino es un metal usado con frecuencia como elemento para medir altas temperatura. Su resistividad a 20° C es $\rho = 11 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ y su coeficiente de temperatura es $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$. En una cierta medición, se determinó que la resistencia del elemento de platino varió de 4 Ω (20 °C) a 10 Ω cuando se le introduce en un horno. ¿Cuál es la temperatura del horno?

Solución

Cuando se introduce en el horno, la resistividad del platino varía de acuerdo a la relación (6.12):

$$\rho_T = \rho_{20} [1 + \alpha(T - 20^\circ \text{C})] \quad (6.13)$$

Las resistencias a 20 °C y a la temperatura T , del horno, pueden escribirse como:

$$R_{20} = \rho_{20} \frac{l}{A} \quad R_T = \rho_T \frac{l}{A}$$

De las relaciones anteriores se deduce:

$$\frac{\rho_T}{\rho_{20}} = \frac{R_T}{R_{20}} \quad (6.14)$$

Combinando (6.13) con (6.14):

$$\frac{R_T}{R_{20}} = [1 + \alpha(T - 20^\circ \text{C})]$$

Despejando T de la relación resultante, deducimos el valor de la temperatura alcanzada por el horno:

$$\alpha(T - 20^\circ \text{C}) = \frac{R_T}{R_{20}} - 1 \Rightarrow T - 20^\circ \text{C} = \frac{\frac{R_T}{R_{20}} - 1}{\alpha}$$

$$T = \frac{\frac{R_T}{R_{20}} - 1}{\alpha} + 20 = \frac{\frac{10}{4} - 1}{3,9 \cdot 10^{-3}} + 20 = 404,62^\circ \text{C}$$

Ejemplo 6.5

El diámetro de un conductor de aluminio, calibre 10, es de 2,59 mm. **a)** Determina la resistencia de un alambre de aluminio de 1 km de longitud. **b)** Si en los extremos del alambre se aplica una diferencia de potencial de 110 voltios, determina la corriente que fluye en el mismo. **c)** ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior del conductor?

Solución

a) De acuerdo a (6.11) y a la tabla 6.1:

$$R = \rho \frac{l}{A} = 2,65 \cdot 10^{-8} \frac{1.000}{\pi \left(\frac{2,59}{2} \cdot 10^{-3} \right)^2} = 5 \, \Omega$$

b) Aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{110}{5} = 22 \, \text{A}$$

c) Dado que $V = E \cdot L$:

$$E = \frac{V}{l} = \frac{110 \, \text{V}}{1.000 \, \text{m}} = 0,11 \, \text{V/m}$$

Nota que el campo eléctrico dentro del conductor es relativamente pequeño.

6.8 ENERGÍA ELÉCTRICA

Comúnmente, una o varias resistencias eléctricas pueden ser conectadas a una fuente de alimentación o a una batería. Esta configuración, cuyo modelo más simple se muestra en la fig. 6.14, implica un intercambio de energía entre la fuente de corriente continua, representada por la batería, y un elemento disipador de energía, representado por la resistencia. Es necesario señalar que en los circuitos o redes eléctricas que estudiaremos, los conductores que conectan los distintos elementos circuitales carecen de resistencia. Aunque esta es una situación ideal, no afectan significativamente los resultados obtenidos, cuando la resistencia de los elementos resistivos (resistores) es mucho mayor que la de los conductores de interconexión. Así, los conductores

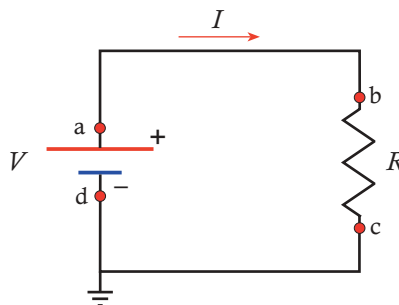


Fig. 6.14 Circuito eléctrico elemental de corriente continua.

entre los puntos $a-b$ y los puntos $c-d$ del circuito básico de la fig. 6.14 tienen cero resistencia. Se supone que el resistor R concentra todo el efecto resistivo de la red. Todos los voltajes en la red se miden con respecto al terminal negativo de la batería, que es tomado arbitrariamente como potencial cero de referencia o «tierra». Se utiliza el símbolo $\perp$ para enfatizar este hecho.

Veamos cómo aparece el concepto de energía en un circuito eléctrico. Cuando una corriente I circula en la red, los portadores de carga, en este caso electrones, se mueven siguiendo el camino convencional cerrado $d-a-b-c-d$. Tanto la batería de voltaje V , como el resistor de resistencia R , son atravesados por las cargas en movimiento. La batería actúa como un motor que traslada internamente una carga cualquiera Δq desde el punto d hasta el punto a . En este proceso, como la carga pasa de un potencial menor (tierra) a un potencial mayor, gana cierta cantidad de energía, la cual es suministrada por la batería. Las reacciones químicas internas que tienen lugar dentro de la batería, ceden energía a la carga móvil de electrones. Por supuesto, que en esa misma proporción, la batería pierde energía. La energía ganada por la carga Δq está dada por:

$$\Delta U = \Delta q \cdot V \quad (6.15)$$

Una vez que la carga llega al punto a , se dirige hacia el resistor R , sin perder energía, ya que hemos considerado que los conductores de la red no tienen resistencia. Alcanzado R , los electrones coliden con los átomos del resistor, perdiendo energía que se manifiesta en forma de calor. Esto se pone en evidencia por el aumento de temperatura del resistor. Asumiendo que toda la energía entregada por la

batería es disipada en el elemento resistivo, la relación (6.15) representa, también, la energía perdida por el circuito. La velocidad a la cual esta energía se pierde en el resistor se obtiene dividiendo ΔU por Δt :

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot V$$

Por definición, $\Delta U/\Delta t$ es la potencia, P , perdida en el resistor y $\Delta q/\Delta t$ corresponde a la corriente, I , en el circuito. Entonces:

$$P = V \cdot I \quad (6.16)$$

Aunque deducida para un resistor, la relación anterior es general y válida para cualquier elemento cuyo voltaje entre terminales sea V y por el cual circule una corriente eléctrica I . Si usamos la ley de Ohm, la expresión para la potencia eléctrica en un resistor puede escribirse de las siguientes maneras:

$$P = R \cdot I^2$$

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (6.17)$$

Con la corriente expresada en amperes y el voltaje en voltios, la unidad SI de potencia eléctrica es el *watt*, abreviada con la letra W. En la práctica, se utilizan con frecuencia múltiplos y submúltiplos de la unidad fundamental, tales como el kilowatt (kW), el megawatt (MW) y el miliwatt (mW).

Así como consideramos que los conductores de un circuito son ideales y no generan pérdidas de energía, se ha supuesto que las baterías son, también, elementos ideales, cuyo voltaje entre bornes es el marcado nominalmente en su envoltura. Así se habla de baterías con voltajes nominales de 12 V, 1,5 V, etc. En realidad, cuando la corriente circula por la batería, hace que este voltaje nominal descienda hasta un cierto valor, el cual depende de cada batería en particular. Se habla entonces de una resistencia interna de la batería, r_i , cuya presencia origina pérdida de potencia por calor. Esto será estudiado con más detalle en el próximo capítulo. Por ahora consideraremos que estamos tratando con baterías ideales.

Existe una relación entre la potencia que se suministra a un resistor y el calor generado en el mismo. A tal relación se le denomina *efecto Joule*. Si denominamos Q (no confundir con la carga eléctrica) a la cantidad de calor que desprende un conductor metálico bajo el efecto de una corriente eléctrica y asumimos que toda la energía eléctrica suministrada se convierte en calor, podemos escribir:

Trabajo realizado por batería (W) = Calor disipado en R (Q)

Dividiendo ambos miembros de la relación anterior por el tiempo t , obtenemos la potencia en el resistor:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q}{t}$$

Pero, según (6.17), la potencia P es igual a Ri^2 , por lo que el calor disipado en R está dado por:

$$Q = P \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t \quad (6.18)$$

Si en la relación anterior la corriente, la resistencia y el tiempo se expresan, respectivamente, en amperes, ohms y segundos, el calor generado resulta en joules. Para obtener ese valor en calorías, es necesario multiplicar la expresión (6.18) por la cantidad $\gamma = 0,24$. De esta forma se obtiene:

$$Q = \gamma \cdot I^2 \cdot R \cdot t \text{ (cal)} \quad (6.19)$$

relación que se conoce como *ley de Joule* y que expresa la cantidad de calorías que se obtienen al hacer pasar una corriente I por una resistencia R en un tiempo t . Aunque deducida para una corriente continua, la relación (6.19) puede aplicarse a una corriente alterna, como la que usamos en nuestros hogares, si la intensidad I es reemplazada por el *valor eficaz* de la corriente alterna, cuyo significado se tratará posteriormente en este libro.

6.9 EL CONSUMO DE ENERGÍA ELÉCTRICA

El consumo mundial de energía eléctrica ha experimentado aumentos significativos desde comienzos del siglo pasado. Mucha de esta energía es necesaria para los grandes procesos industriales y otra gran parte de la misma se utiliza para hacer

más agradable la vida en el hogar o en las ciudades y pueblos. El alumbrado público y residencial, los artefactos electrodomésticos, los sitios de recreación, traen consigo un elevado porcentaje en el uso de la energía eléctrica.

La energía eléctrica se genera industrialmente mediante las grandes represas, que hacen uso de la energía potencial almacenada en reservorios de agua y, también, mediante generadores electromecánicos, que trabajan en base a combustibles fósiles como el carbón, el petróleo, el gas y la orimulsión. Esta energía es transportada desde los centros de producción hasta los puntos de utilización en industrias y ciudades.

Es inconcebible, actualmente, un mundo sin energía eléctrica. De allí la enorme importancia que se le asigna a las fuentes de reserva energéticas ubicadas en los países productores de petróleo, entre ellos, Venezuela. Asimismo, es de fundamental importancia el manejo racional que se le debe dar a los recursos energéticos, muchos de ellos sujetos a la merma constante por el uso intensivo. De allí la preocupación permanente en crear sistemas eficientes en la utilización de la energía eléctrica. Por ejemplo, es más eficiente usar luz fluorescente que bombillos incandescentes para la iluminación. Esto no sólo enfatiza la conservación de las fuentes de energía, sino que redunda de manera importante en la economía del hogar.

En la tabla 6.2 se enumeran algunos equipos electrodomésticos son sus respectivos consumos.

Consumo Típico de Artefactos Eléctricos	
Artefacto	Consumo de Energía en kWh
Computador	0,300
Televisor 20"	0,070
Bomba de agua 1/2 hp	0,368
Cafetera	0,720
Nevera con freezer	0,098
Horno de microondas	0,640
Calentador de agua	4,500
Lavadora automática	0,182
Minicomponente	0,060
Plancha	0,600
Ventilador	0,090
Aire acondicionado	1,013

Tabla 6.2.

Como puede verse, el consumo de energía está expresado en *kWh* (kilowatts-h), que es la unidad en la cual se nos envía el recibo de consumo eléctrico. El kWh no es una medida de potencia, es una medida de energía que establece cuánta energía se consume en un tiempo de una hora. Por ejemplo, un bombillo de una potencia de 100 watts (0,1 kW) consume en una hora de funcionamiento una energía de 0,1 kWh. Como 1 kW es igual a 1.000 W = 1.000 J/s, podemos escribir:

$$1 \text{ kWh} = 1.000 \text{ W} \cdot 1 \text{ h} = 1.000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ h} = 3.600.000 \text{ J}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} \quad (6.20)$$

Ejemplo 6.6

La batería de 12 V de un automóvil tiene especificada una capacidad de 400 A-h, lo que significa que puede proporcionar una corriente de 400 A por una hora antes de descargarse. **a)** ¿Qué cantidad de energía puede almacenar la batería? **b)** Si, por olvido, se dejan encendidas las luces de 200 W del automóvil, desde las 9 de la noche, ¿estarán éstas encendidas a las 8 de la mañana del día siguiente?

Solución

a) Como $I = q/t$, la carga que puede mover la batería de un borne a otro es $q = I \cdot t$. Esto afirma que la carga puede expresarse en unidades de amperes-segundos. Es decir que la especificación dada de 400 A-h, corresponde a una cierta cantidad de carga. Para expresar 400 A-h en coulombs, basta con reducir horas a segundos, multiplicando por 3.600:

$$q = 400 \text{ A} \cdot \text{h} = 400 \cdot 3.600 = 144 \cdot 10^4 \text{ C}$$

La cantidad de energía que puede suministrar la batería, equivalente al trabajo W que hace para trasladar la carga en el circuito que mantiene encendido las luces del vehículo, se calcula usando la relación $U = q \cdot V$:

$$U = W = q \cdot V = 144 \cdot 10^4 \cdot 12 = 1,73 \cdot 10^7 \text{ J}$$

b) Como la potencia de las luces del vehículo es de 200 W y $P = W/t$ el tiempo que mantiene esta carga la batería es:

$$t = \frac{W}{P} = \frac{1,73 \cdot 10^7 \text{ J}}{200 \text{ W}} = 8,65 \cdot 10^4 \text{ s} = 24 \text{ h}$$

Puesto que entre las 9 pm y las 8 am hay 11 horas, las luces estarán encendidas al otro día.

Ejemplo 6.7

Un calentador eléctrico de agua tiene una potencia de 4.500 W y opera durante 4 horas diarias a un voltaje de 110 V. Si cada kWh cuesta Bs. 60, determina: a) La corriente que pasa por el calentador. b) La resistencia del calentador. c) La cantidad de calor que desprende en 4 horas. d) El costo de funcionamiento durante un mes.

Solución

a) La corriente que pasa por el calentador de la fuente de voltaje la calculamos mediante la relación:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{4.500 \text{ W}}{110 \text{ V}} = 40,91 \text{ A}$$

b) Como $V = R \cdot I$, tenemos:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110 \text{ V}}{40,91 \text{ A}} = 2,69 \Omega$$

c) De acuerdo a (6.18) y, dado que 4 h = 14.400 s:

$$Q = \gamma \cdot P \cdot t = 0,24 \cdot 4.500 \cdot 14.400 = 15.552 \text{ kcal}$$

d) La cantidad de calor, expresada en joules, es igual a $15.552/0,24 = 64.800 \text{ kJ}$, lo cual es equivalente a:

$$\text{Energía en kWh} = \frac{64.800.000}{3.600.000} = 18 \text{ kWh}$$

Como cada kWh cuesta Bs. 60, el costo de la energía consumida en 4 horas es:

$$\text{Costo: } 18 \text{ kWh} \cdot 60 \text{ Bs/kWh} = 1.080 \text{ Bs/día}$$

En un mes, el costo total de funcionamiento es de Bs. $(1.080 \cdot 30) = \text{Bs. } 32.400$.

Ejemplo 6.8

Una corriente de 0,025 A fluye en una resistencia de 560 Ω . a) ¿Qué voltaje se aplica al resistor? b) ¿Qué potencia se disipa en el mismo? c) ¿Qué energía se gasta en 10 minutos? d) Si el resistor está diseñado para una potencia máxima de 0,5 W, ¿cuál es el voltaje máximo que se le puede aplicar? ¿Cuál es la máxima corriente que, en estas condiciones, circula por la resistencia?

Solución

a) De acuerdo con la ley de Ohm:

$$V = R \cdot I = 560 \Omega \cdot 0,025 \text{ A} = 14 \text{ V}$$

b) La potencia disipada está dada por:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{196}{560} = 0,35 \text{ W}$$

c) De acuerdo a la relación (6.18) y como 10 min = 600 s:

$$U = I^2 \cdot R \cdot t = P \cdot t = 0,35 \cdot 10 \cdot 60 = 210 \text{ J}$$

d) Como $P = V^2/R$, tenemos:

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{P_{\text{máx}} \cdot R} = \sqrt{0,5 \cdot 560} = 16,73 \text{ V}$$

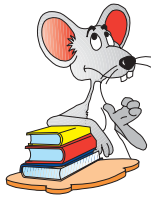
También:

$$P_{\text{máx}} = V_{\text{máx}} \cdot I_{\text{máx}} \Rightarrow I_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{V_{\text{máx}}}$$

Sustituyendo valores:

$$I_{\text{máx}} = \frac{0,5 \text{ W}}{16,73 \text{ V}} = 0,030 \text{ A}$$

Es decir, el resistor no puede soportar una corriente mayor de 30 mA. Cuando la corriente está cerca de ese límite, el resistor se recalienta y la alta temperatura puede dañarlo irreversiblemente. De allí la conveniencia de operar un resistor lejos de la máxima potencia que puede disipar.



PIENSA Y EXPLICA



- 6.1** ¿Qué es una corriente eléctrica? ¿Corresponde ésta sólo al movimiento de electrones?
- 6.2** ¿Qué partículas están envueltas en una corriente eléctrica en distintos medios conductores?
- 6.3** Describe cómo se produce una corriente eléctrica en un metal, en una solución conductora y en un gas.
- 6.4** ¿Bajo qué condiciones se produce una corriente eléctrica en cualquier material conductor?
- 6.5** Explica los efectos más relevantes del flujo de cargas a través de un conductor.
- 6.6** ¿Cómo es posible producir una corriente eléctrica mediante calor?
- 6.7** ¿Por qué es importante el uso de termoplas en satélites artificiales que viajan muy lejos en relación con el Sol?
- 6.8** ¿En qué se basa el fenómeno de la pizoelectricidad? ¿Qué aplicaciones importantes tiene el efecto pizoelectrico? Explica cómo tiene lugar dicho efecto.
- 6.9** Describe el efecto fotoelectrico. ¿En cuales dispositivos de uso industrial muy difundido se utiliza este efecto?
- 6.10** Dibuja el esquema básico de la pila creada por Alessandro Volta. ¿En que forma la batería de Leclanche mejoró el diseño original de Volta?
- 6.11** Describe, según la fig. 6.7, el flujo de portadores de carga en una batería.
- 6.12** ¿Cuál es la razón para conectar dos o más baterías en paralelo o en serie?
- 6.13** ¿Por qué, cuando se conectan dos baterías en paralelo, su voltaje debe ser el mismo?
- 6.14** Deduce la fórmula (6.1) que relaciona la intensidad de corriente con los portadores de carga por unidad de volumen, el área de la sección transversal de un conductor, la velocidad promedio de los portadores y la carga de cada portador.
- 6.15** ¿Cuál es la unidad SI de la intensidad de corriente eléctrica?
- 6.16** ¿Qué es la velocidad de arrastre de los electrones en un conductor? Explica cómo, a pesar de que la velocidad de arrastre en un conductor es muy pequeña, el efecto de una corriente se percibe casi instantáneamente?
- 6.17** ¿Qué es una corriente variable? ¿Qué es una corriente continua? ¿Qué es una corriente alterna?
- 6.18** ¿Toda corriente alterna es sinusoidal? ¿Toda corriente sinusoidal es alterna?
- 6.19** Define la densidad de corriente y escribe la relación cuantitativa que la representa. ¿Qué es la conductividad eléctrica?

6.20 Enuncia la ley de Ohm. Escribe las fórmulas que la expresan en forma cuantitativa.

6.21 ¿Qué es un material óhmico? Cita ejemplos de materiales no óhmicos.

6.22 ¿Cómo se define la resistencia eléctrica? Deduce la fórmula de la resistencia eléctrica para un material conductor.

6.23 ¿En qué unidades se expresa la resistencia eléctrica?

6.24 ¿Qué es la resistividad de un conductor? ¿En qué unidades se expresa?

6.25 ¿Cómo varía la resistividad de un material conductor con la temperatura?

6.26 A partir de la relación (6.12), demuestra que la resistencia de un conductor varía según la relación:

$$R = R_{20} [1 + \alpha(T - 20^\circ \text{C})]$$

donde R_{20} es la resistencia a 20°C .

6.27 En el circuito básico de la fig. 6.14, explica cómo tiene lugar la transferencia de energía eléctrica entre la batería y el resistor R .

6.28 Deduce las relaciones (6.16) y (6.17) que relacionan la potencia suministrada a un resistor con el voltaje aplicado y la corriente que se produce.

6.29 ¿Cuál es la unidad SI de potencia eléctrica? ¿Qué submúltiplos de esta unidad se utilizan con frecuencia?

6.30 ¿Qué es el efecto joule? Enuncia la ley de Joule y escribe su expresión cuantitativa. ¿De dónde sale el factor γ que figura en la relación (6.19).

6.31 ¿Cuáles son las fuentes energéticas más importantes que tienen que ver con el suministro de electricidad?

6.32 ¿Por qué es necesario preservar las fuentes de energía fósil como base del desarrollo industrial de la humanidad.

6.33 ¿Qué es el kilowatt-hora? ¿Es una medida de potencia o de energía? ¿Cuál es su equivalencia en joules?

6.34 ¿Qué significa que el recibo por consumo eléctrico de una residencia es de 800 kWh? ¿Cuánto cuesta el kWh actualmente en Venezuela?



PROBLEMAS



6.1 Determina la velocidad de arrastre de los electrones de un alambre de cobre cuya área transversal es de $0,05 \text{ mm}^2$ y que transporta una corriente de intensidad igual a 2 A.

6.2 Una corriente continua de 2,5 A circula por un conductor. a) ¿Qué cantidad de carga fluye por el mismo en 10 min? b) ¿Cuántos electrones pasan por un punto del conductor en ese tiempo?

- 6.3** La corriente en un conductor de cobre # 12, de los usados en las instalaciones eléctricas residenciales, tiene un área transversal de $3,31 \text{ mm}^2$ y por él circula una corriente de 10 A. ¿Cuál es la velocidad de arrastre de los electrones?
- 6.4** La corriente en un tubo fluorescente de radio 3 cm consiste de electrones libres y de iones cargados positivamente. Si el número de electrones y de iones por segundo es de $2 \cdot 10^{18}$ y $0,8 \cdot 10^{18}$ por segundo, respectivamente, determina la densidad de corriente en el tubo.
- 6.5** Una calculadora portátil extrae una corriente de 0,10 mA, a partir de una batería de níquel-cadmio de 1,5 V. a) ¿Cuánta carga pasa a la calculadora en 20 min? b) ¿Qué energía consume la calculadora en ese tiempo?
- 6.6** La densidad de corriente en un conductor de aluminio es de 200 A/m^2 . Si el área transversal del conductor es de $1,5 \text{ cm}^2$, a) ¿Cuál es la corriente en el conductor? b) ¿Cuánta carga pasa por el conductor en 30 min?
- 6.7** Un alambre de aluminio tiene un largo de 20 m y un diámetro de 2,5 mm. a) ¿Cuál es su resistencia? b) ¿Cuál sería su resistencia si el cable fuera de cobre?
- 6.8** Un alambre de nicromo Núm. 22 tiene un radio de 0,4 mm y su resistividad es $1 \cdot 10^{-6} \Omega\text{-m}$. ¿Cual debe ser su longitud para que al conectarlo a un voltaje de 110 V se disipen 0,5 kW?
- 6.9** Un voltaje de 50 V da lugar a una corriente de 2,4 A en una resistencia. a) ¿Cuál es el valor de dicha resistencia? b) ¿Cuál es el valor de la corriente si se incrementa el voltaje a 120 V. c) ¿Qué potencia se disipa en el primer caso? d) ¿Cuál valor mínimo de potencia debe tener la resistencia en el segundo caso?
- 6.10** A una barra de carbono de sección transversal $3 \times 5 \text{ cm}$ y 20 m de largo se le aplica una diferencia de potencial de 10 V. a) ¿Cuál es su resistencia? b) ¿Cuál es la densidad de corriente en la barra?
- 6.11** ¿Cuál es la longitud de un conductor de aluminio de calibre 12 y resistencia igual a $1,2 \Omega$?
- 6.12** El elemento básico de un termómetro para medir altas temperaturas es de platino el cual posee una resistencia de 4Ω a una temperatura de 20°C . Si se conecta a una batería de 6 V, ¿cuál es el valor de la corriente en dicho elemento, si la temperatura aumenta a 1.200°C ?
- 6.13** La resistividad del carbono es de $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega\text{-cm}$. ¿Qué longitud debe tener una resistencia de carbono de 2 mm de diámetro para obtener una resistencia de 12Ω ?
- 6.14** A un conductor de cobre AWG Núm. 12 de sección $3,31 \text{ mm}^2$ y longitud 0,5 m, se le somete a un aumento de temperatura de 70°C . a) ¿Cuál es su resistencia, luego del incremento de temperatura? b) ¿Cuál es la variación de corriente, si el voltaje aplicado es de 2 V?
- 6.15** Una fuente de alimentación de 36 V se conecta a un resistor, el cual disipa 20.000 J de calor en 5 min. ¿Cuál es el valor de la resistencia del resistor?
- 6.16** Un resistor de $1,6 \text{ k}\Omega$ puede soportar una disipación máxima de potencia de 0,5 W. ¿Cuál es el máximo voltaje que se le puede aplicar sin sobrepasar su potencia nominal?
- 6.17** Una cafetera consume 720 W cuando se conecta a 110 V. a) ¿Cuánta corriente utiliza? b) ¿Cuál es su resistencia?

6.18 Para cargar la batería de 12 V de un vehículo se utiliza un cargador de batería que suministra una corriente de 10 A durante 2 h. a) ¿Cuánta carga se entrega a la batería? b) ¿Qué potencia entrega el cargador? c) ¿Qué energía se transfiere durante el proceso?

6.19 a) ¿Que cantidad de energía en kWh consume una plancha funcionando por 4 horas a 110 V, si la corriente en el resistor interno de la misma es de 6 A? b) Si el costo del kWh es de Bs. 90 y la plancha funciona durante 12 horas al mes, determina el monto del gasto mensual debido a este artefacto

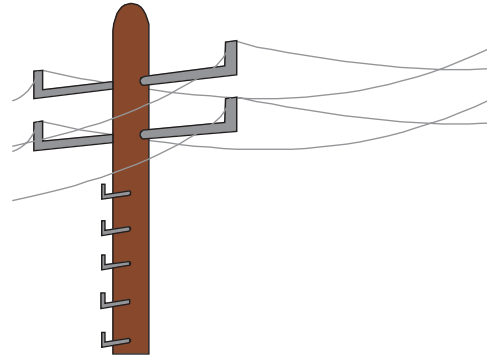
6.20 Si se mantiene una corriente de 0,5 A por 2 h en un resistor de $100\ \Omega$, ¿qué energía, expresada en J y en cal, se disipa en el resistor?

6.21 Un calentador de agua doméstico de 40 litros consume 1.500 W cuando se conecta a la línea de 110 V. a) ¿Qué corriente absorbe cuando funciona normalmente, si se supone la resistencia del calentador constante? b) ¿Cuánto tarda en calentar los 40 l de agua hasta una temperatura de $60\ ^\circ\text{C}$?

6.22 Una bomba de agua de 1/2 hp trabaja a 110 V durante 2 h diarias. Si su eficiencia para convertir potencia eléctrica en mecánica es del 80%, determina: a) La corriente absorbida por el motor. b) La energía consumida durante un mes de funcionamiento. c) El costo de funcionamiento mensual, si el precio del kWh es de Bs. 90.

CAPÍTULO 7

REDES DE CORRIENTE CONTINUA



7.1 CIRCUITOS ELÉCTRICOS. FUENTES DE ENERGÍA.

Un circuito eléctrico o red eléctrica es una agrupación de elementos eléctricos, conectados convenientemente para producir voltajes y corrientes en las diversas partes que lo integran. Básicamente, un circuito eléctrico está formado por elementos pasivos, tales como resistores y capacitores y las fuentes de alimentación o fuentes de energía, cuyo papel es proporcionar la energía necesaria para mantener una corriente en el sistema. A las fuentes de energía se les conoce como *elementos activos* del circuito, mientras que los elementos a los cuales se les conecta (resistores, capacitores, inductores) se les conoce como *elementos pasivos*. Los circuitos eléctricos desempeñan una gran variedad de funciones, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

- a) Conversión de energía: se utilizan circuitos eléctricos para convertir energía eléctrica en energía luminosa o en calor. También, es posible la conversión de corriente continua en corriente alterna y viceversa.
- b) Amplificación: circuitos electrónicos se emplean para variar los niveles de voltaje desde un nivel bajo hasta uno mayor. El ejemplo típico lo constituyen los amplificadores de audio, usados en equipos de reproducción de música.
- c) Manejo de información: circuitos eléctricos se usan ampliamente en la transformación de señales tanto mecánicas como eléctricas de manera que la salida pueda ser objeto de medición. Tal es el

caso de los circuitos empleados en la medida de variables físicas y químicas como la velocidad, la presión, la temperatura, la conductividad eléctrica, el pH de soluciones, etc.

Entre las fuentes de alimentación podemos distinguir las *fuentes de voltaje* y las *fuentes de corriente*. Una *fente ideal de voltaje* mantiene entre sus terminales una *diferencia de potencial constante, independientemente del circuito al cual se conecta*. Por analogía, una *fente ideal de corriente* mantiene entre sus terminales una *corriente constante e independiente del circuito al cual se conecta*. Ejemplos de fuentes de voltaje son las baterías, las pilas y los grandes generadores utilizados para suministrar energía a los centros poblados. Las fuentes de corriente son menos comunes y surgen cuando se trata de hacer modelos circuitales de elementos tales como los transistores o las fotoceldas. En este capítulo trataremos sólo circuitos eléctricos formados por resistores y excitados por fuentes de voltaje de corriente continua.

Las fuentes ideales de voltaje se representan como se muestra en la fig. 7.1. Como ya vimos en el capítulo 6, la batería se representa por el símbolo $\begin{array}{c} + \\ | \\ - \end{array}$. Cuando se trata de fuentes variables de voltaje el símbolo es $\begin{array}{c} + \\ \bigcirc \\ - \end{array}$. Una fuente sinusoidal de voltaje se representa mediante el símbolo $\begin{array}{c} + \\ \sim \\ - \end{array}$.

En la sección 6.8 mencionamos que en una red eléctrica los conductores que unen las fuentes de voltaje con los resistores carecen de resistencia. Igualmente, se mencionó que las baterías, aunque

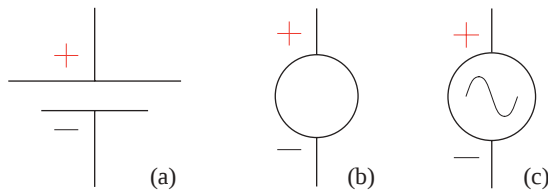


Fig. 7.1 Símbolos para representar fuentes de voltaje:
a) Continua. b) Variable. c) Sinusoidal.

muchas veces se les considera ideales, poseen cierta resistencia interna que produce disipación de calor y, por tanto, pérdida de energía eléctrica en el interior de la misma. A esta resistencia interna se le denota como r_i . Tomando en cuenta esto, el modelo usado para representar una *batería real* es el que se muestra en la fig. 7.2 (a). En este modelo $\mathcal{E}$ corresponde al voltaje generado internamente en la batería, al cual se le conoce como *fuerza electromotriz* (fem). En realidad, el término fuerza electromotriz no se refiere a una fuerza y, de allí, que no sea el más apropiado para designar a un voltaje. Sin embargo, a lo largo del tiempo dicho término ha perdurado como una sugerencia de que la batería mantiene el flujo de electrones, gracias a la fuerza que se imprime sobre éstos. Entonces, podemos imaginar que dentro de la batería tenemos una fuente de voltaje constante y una resistencia interna, responsable de la diferencia entre el voltaje generado y el voltaje observado en sus bornes, cuando se produce una corriente externa.

Si se conecta una batería real a una resistencia externa, el voltaje en los bornes de la misma variará según la cantidad de corriente que circula en el circuito. Este es el caso presentado en la fig. 7.3, donde un resistor se conecta a una batería real y se produce una corriente I en el circuito. Esta corriente circula internamente en la batería y externamente

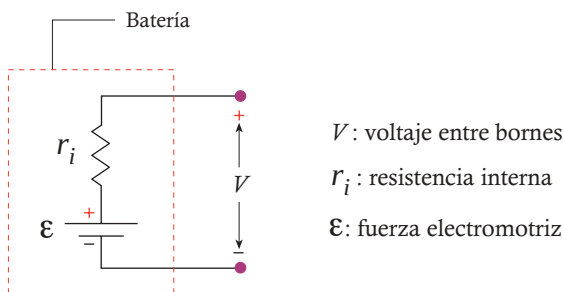


Fig. 7.2 Representación de una batería real.

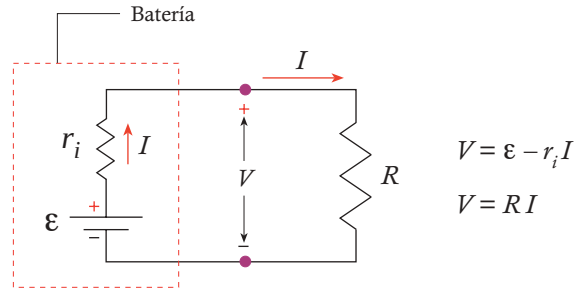


Fig. 7.3 Batería real conectada a un resistor externo.

en el resistor R . En los bornes de la batería el voltaje observado está dado por:

$$V = \mathcal{E} - r_i I \quad (7.1)$$

Relación que indica que el voltaje entre los bornes de la batería es menor en la cantidad $r_i I$, con respecto al voltaje generado internamente en la batería. Este voltaje es el mismo que se aplica al resistor R . Usando la ley de Ohm:

$$V = RI \quad (7.2)$$

Combinando las relaciones (7.1) y (7.2):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_i} \quad (7.3)$$

Es decir, la corriente en el circuito depende de la fuerza electromotriz de la batería y de los valores de la resistencia interna y del resistor externo.

Veamos cuáles son las relaciones de potencia en el circuito. En los resistores R y r_i la potencia puede calcularse usando las relaciones (6.16) o (6.17):

$$P_R = RI^2 \quad P_{r_i} = r_i I^2 \quad (7.4)$$

La potencia suministrada por la batería es $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I$ y debe ser igual, por el principio de conservación de la energía, a la potencia disipada en los resistores R y r_i . Usando las relaciones (7.4):

$$\mathcal{E}I = RI^2 + r_i I^2 \quad (7.5)$$

Hay que observar que, según la relación anterior, si $r_i \ll R$ como sucede en muchos casos prácticos, toda la potencia entregada por la batería se consume en el resistor R .

Ejemplo 7.1

Un resistor de $10\ \Omega$ se conecta a una batería de fuerza electromotriz $12\ \text{V}$ y resistencia interna $0,5\ \Omega$. Determina: **a)** La corriente en el circuito. **b)** El voltaje en el resistor externo. **c)** La potencia suministrada por la batería. **d)** La potencia que se convierte en calor en el resistor. **e)** La potencia que se pierde en el interior de la batería. **f)** La energía que es capaz de almacenar la batería si su capacidad es de $400\ \text{A}\cdot\text{h}$.

Solución

a) De acuerdo a la relación (7.3):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_i} = \frac{12}{10 + 0,5} = 1,14\ \text{A}$$

b) Utilizando (7.1):

$$V_R = \mathcal{E} - r_i I = 12 - 0,5 \cdot 1,14 = 11,43\ \text{V}$$

Observa que el voltaje en el resistor externo no es igual a la fem, debido a la presencia de r_i .

c) La potencia suministrada por la batería es:

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I = 12 \cdot 1,14 = 13,68\ \text{W}$$

d) En el resistor externo se disipan:

$$P_R = RI^2 = 10 \cdot 1,14^2 = 13\ \text{W}$$

e) En el interior de la batería el calor perdido es:

$$P_{r_i} = r_i I^2 = 0,5 \cdot 1,14^2 = 0,65\ \text{W}$$

f) En la batería se puede almacenar una carga dada por $U = q\mathcal{E}$. La unidad $\text{A}\cdot\text{h}$ es una unidad de carga, ya que:

$$\text{Ampere} = \frac{\text{coulombs}}{\text{seg}} \quad \text{Ampere} \cdot \text{h} = \frac{\text{coulombs}}{\text{seg}} \cdot \text{hora}$$

Sólo bastaría convertir horas a segundos. Como $1\ \text{h} = 3.600\ \text{s}$, tendremos:

$$U = (400\ \text{Ah}) \cdot (3.600 \frac{\text{s}}{\text{h}}) \cdot 12\ \text{V} = 1,73 \cdot 10^7\ \text{J}$$

Ejemplo 7.2

Con el fin de determinar la fuerza electromotriz (fem) y la resistencia interna de una batería se le conectan resistencias de $36\ \Omega$ y $47\ \Omega$, las cuales dan origen a corrientes de $100\ \text{mA}$ y $70\ \text{mA}$, respectivamente. ¿Cuáles son $\mathcal{E}$ y r_i ?

Solución

Para las dos situaciones, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r_i} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r_i}$$

Dividiendo I_2 por I_1 :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 + r_i}{R_2 + r_i}$$

Efectuando operaciones y despejando r_i :

$$R_2 I_2 + r_i I_2 = R_1 I_1 + r_i I_1 \Rightarrow r_i (I_2 - I_1) = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$r_i = \frac{R_1 I_1 - R_2 I_2}{I_2 - I_1}$$

Sustituyendo los valores dados con $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 36\ \Omega$, $I_1 = 100\ \text{mA}$ e $I_2 = 70\ \text{mA}$:

$$r_i = \frac{36 \cdot 0,1 - 47 \cdot 0,07}{0,1 - 0,07} = \frac{3,6 - 3,29}{0,03} = 10,33\ \Omega$$

Este valor de resistencia interna es bastante alto, en comparación con la resistencia externa conectada al circuito.

El valor de la fuerza electromotriz puede calcularse a partir de las ecuaciones iniciales. Entonces:

$$\mathcal{E} = (R_1 + r_i)I_1 = (36 + 10,33) \cdot 0,1 = 4,63\ \text{V}$$

7.2 ANÁLISIS DE REDES: REFERENCIAS PARA CORRIENTES Y VOLTAJES

Aun cuando en el próximo capítulo se abordará con más propiedad la descripción de amperímetros y voltímetros, es conveniente mencionar aquí que estos instrumentos se utilizan para medir corrientes y voltajes, respectivamente. Los símbolos usados para representar dichos instrumentos se muestran en la fig. 7.4. Los signos positivos y negativos, que se marcan en esos equipos de medición, se utilizan como referencia para determinar la dirección de la corriente y la polaridad del voltaje. Para explicar esto, pongamos atención a la parte (a) de la fig. 7.4. El amperímetro tiene marcado el signo positivo al lado izquierdo y el signo negativo al lado derecho. Si al medir una corriente cualquiera I en un circuito, se produce una deflexión de la aguja del instrumento en el sentido de las manecillas del reloj, la corriente tiene una dirección que, convencionalmente, consideramos como positiva. Si por el contrario, la deflexión es contraria al sentido de giro de las manecillas del reloj, su dirección será negativa.

Similarmente, en el caso de un voltímetro se marcan signos positivo y negativo en sus terminales. Si el voltaje V_{ab} del circuito produce una deflexión en sentido de giro de las manecillas del reloj consideramos que es positivo; de lo contrario, será negativo.

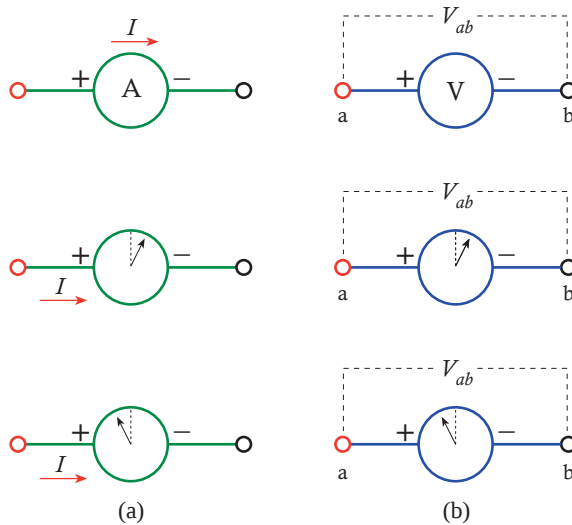


Fig. 7.4 Representación esquemática de voltímetros y amperímetros.

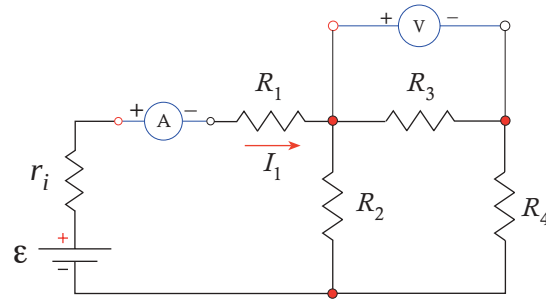


Fig. 7.5 Medición de la corriente en R_1 y el voltaje en R_3 , mediante el uso de un amperímetro y un voltímetro, respectivamente

Un amperímetro se conecta en serie en el punto donde se desea medir la corriente, mientras que un voltímetro se conecta en paralelo entre los terminales donde se medirá el voltaje. En la mayoría de los casos prácticos se asume que cuando se conectan amperímetros y voltímetros en un circuito, su presencia no afecta la medición. Esto es equivalente a decir que el amperímetro tiene una resistencia interna nula y que el voltímetro tiene una resistencia interna infinita.

En la fig. 7.5 consideramos una red cualquiera, formada por varias resistencias conectadas a una fuente de alimentación. El amperímetro mide la corriente que pasa por el resistor R_1 , mientras que el voltímetro mide el voltaje en el resistor R_3 .

7.2 ANÁLISIS DE REDES: LEYES DE KIRCHHOFF

El análisis de una red eléctrica consiste en la determinación de las corrientes y voltajes en los distintos elementos de la red, conocidos sus valores y la *fem* de la fuente de alimentación. En el caso de redes resistivas, esos elementos son resistores y fuentes de corriente continua. Con el fin de crear las bases del análisis, es necesario establecer ciertas convenciones en cuanto a las direcciones de la corriente y la polaridad de los voltajes. Una vez acordada esta convención, se tendrán referencias firmes para realizar el análisis. Para ello, observemos la fig. 7.6, donde se muestra un resistor en el cual fluye una corriente I y una fuente de alimentación, atravesada por una corriente de igual magnitud.

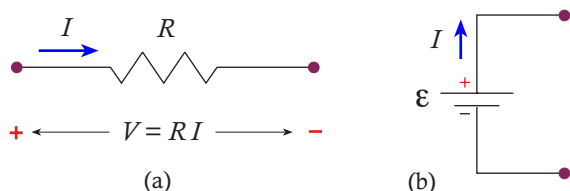


Fig. 7.6 a) Convención de signos en el voltaje de un resistor: al terminal por donde entra la corriente se le asigna signo positivo y al terminal por donde sale la corriente se le asigna signo negativo. b) Flujo de corriente en una fuente de corriente continua: la corriente sale por el terminal positivo de la batería, en cuyo caso suministra energía al circuito al cual se conecta. En caso contrario, si la corriente entrara por el terminal positivo, la batería recibiría energía del circuito externo.

Asumiremos que una corriente I , que fluye a través de un resistor R , produce un voltaje o diferencia de potencial (con frecuencia denominada *caída de voltaje*) entre sus terminales, de valor RI , y cuya polaridad es la mostrada en la fig. 7.6 (a). Es decir, *el voltaje será positivo en el terminal por donde entra la corriente y negativo en el terminal por donde sale*. Esto significa que el terminal de entrada tiene un potencial mayor que el de salida, lo cual es debido a la pérdida de energía que tiene lugar en el resistor, como resultado de la transformación en calor de una fracción de la energía de los portadores de carga. En términos fáciles de entender, podríamos decir que los electrones, al salir del resistor están "debilitados" por la pérdida de energía.

En el caso de una fuente de alimentación, fig. 7.6 (b), asumiremos que *esta suministra energía a la carga que entra por su terminal negativo, cuando la corriente sale por el terminal positivo de la misma*. Si, por el contrario, la corriente entrara por el terminal positivo, la fuente recibiría energía del circuito al cual está conectada. Tal es el caso de una batería descargada, en la cual una red externa a ella se utiliza para recargarla. Se ha de recordar que, convencionalmente, se considera al flujo de corriente constituido por cargas positivas, mientras que el flujo real tiene dirección opuesta al convencional.

En el análisis de redes eléctricas a veces es conveniente expresar la ley de Ohm en términos de los recíprocos de la resistencia de los resistores que componen la red. Al recíproco de la resistencia ($1/R$) se le conoce como *conductancia* y se le denota

por la letra G . De acuerdo con esto, podemos escribir la ley de Ohm de la forma siguiente:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = GV \quad (7.6)$$

La relación anterior es, entonces, la ley de Ohm en función de la conductancia G . La conductancia se expresa en *mhos* (ohm invertido).

Para los efectos de la discusión siguiente, *una red eléctrica es un conjunto de fuentes de alimentación y de resistores, conectados por sus terminales*. En una red, un *nodo* es un punto de la misma donde confluyen dos o más elementos. Así, en la fig. 7.7 son nodos los puntos a, b, c, d y e.

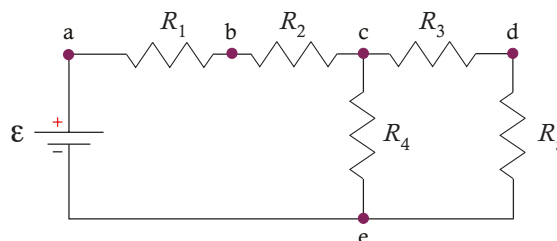


Fig. 7.7 Los puntos a, b, c, d y e son nodos de la red.

Finalmente, debemos dejar por sentado que el comportamiento eléctrico de una red no se ve afectado por la posición de sus elementos en el espacio. Sólo son significativos la forma como ellos están conectados. Así, las redes mostradas en la fig. 7.8 son las mismas desde el punto de vista eléctrico.

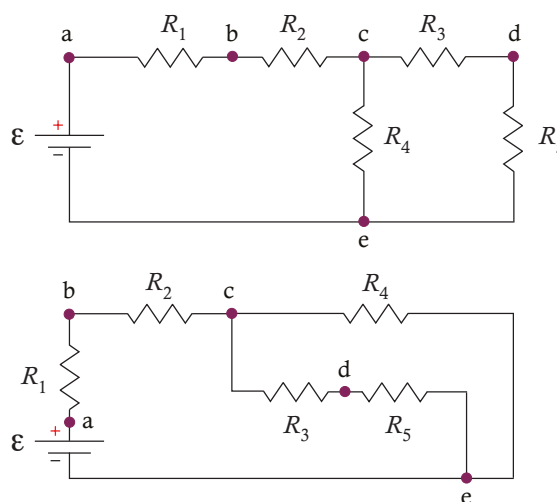


Fig. 7.8 Las redes mostradas son eléctricamente equivalentes.

Una vez establecidas las convenciones anteriores, pasamos a describir las llamadas leyes de Kirchhoff, las cuales permiten analizar sistemáticamente las redes eléctricas.

Primera ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las corrientes en un nodo es igual a cero.

En cualquier nodo habrá corrientes que salen y corrientes que entran en el mismo. Esta ley es consecuencia del principio de conservación de la carga, ya estudiado, y el cual establece que la carga de un sistema permanece invariable; es decir, no puede ser creada ni destruida. En otras palabras, en un nodo no puede haber acumulación de cargas. Cuando hablamos de suma algebraica, estamos conviniendo que algunas corrientes tendrán signos positivos, mientras que otras tendrán signos negativos. Asumiremos que a la corriente que entra a un nodo se le asignará signo positivo, mientras que a la que sale se le asignará signo negativo. En la fig. 7.9 las corrientes I_1 , I_3 e I_4 entran al nodo **b**, mientras que la corriente I_2 sale del mismo. De acuerdo a la primera ley de Kirchhoff:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_3 + I_4 = I_2$$

Para los otros nodos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Nodo a:} \quad & I_1 - I_1 = 0 \\ \text{Nodo c:} \quad & I_2 + I_5 - I_3 = 0 \\ \text{Nodo d:} \quad & -I_1 - I_4 - I_5 = 0 \end{aligned}$$

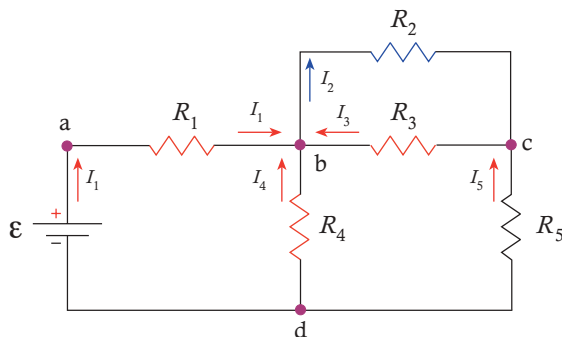


Fig. 7.9 Según la primera ley de Kirchhoff, la suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo es igual a cero.

Segunda ley de Kirchhoff: la suma algebraica de los voltajes en cualquier recorrido cerrado de un circuito es igual a cero.

Un recorrido cerrado de un circuito es todo desplazamiento que comienza y termina en un mismo nodo. A tales recorridos cerrados se les conoce como *mallas* del circuito. Así, en el circuito de la fig. 7.10 podemos hablar de las mallas *abda*, *bcd* y *abca*.

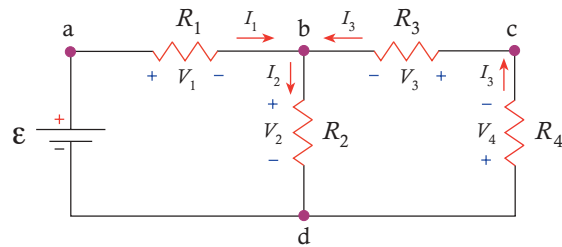


Fig. 7.10 Según la segunda ley de Kirchhoff, la suma algebraica de los voltajes en cualquier malla es igual a cero.

Si suponemos que las corrientes en el circuito fluyen como se muestra en la figura, los voltajes V_1 , V_2 , V_3 y V_4 tienen las polaridades allí señaladas. Estos voltajes están dados, según la ley de Ohm, por:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 I_1 & V_2 &= R_2 I_2 \\ V_3 &= R_3 I_3 & V_4 &= R_4 I_4 \end{aligned}$$

A fin de aplicar la segunda ley de Kirchhoff, estudiemos cada una de las mallas del circuito, describiendo los voltajes que encontramos, a medida que hacemos el recorrido.

Malla *abda*: partimos en el nodo **a** y encontramos el signo + en uno de los terminales del resistor R_1 . Alcanzamos el nodo **b** y entramos por el terminal positivo (+) de R_2 . Luego, llegamos al nodo **d** y nos dirigimos hacia la batería, donde entramos por su terminal negativo. Esto permite escribir la ecuación:

$$V_1 + V_2 - \varepsilon = 0 \quad (7.7)$$

Usando la ley de Ohm y pasando ε al segundo miembro de la ecuación:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = \varepsilon$$

Como hecho resaltante debemos notar que, al recorrer la malla *abcd*, nos encontramos con signos positivos o negativos y este es el signo que aparece delante de las caídas de voltaje o de $\mathcal{E}$ en la relación (7.7). Lo mismo es válido para el resto de las mallas del circuito.

Malla bcdb: partiendo del nodo **b** y recorriendo la malla en el sentido *bcdb*, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$-V_3 - V_4 - V_2 = 0$$

$$-R_3 I_3 - R_4 I_3 - R_2 I_2 = 0$$

Malla abcd: partiendo del punto **a** y haciendo el recorrido *abcd* se tienen las ecuaciones:

$$V_1 - V_3 - V_4 - \mathcal{E} = 0$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 - \mathcal{E} = 0$$

Las relaciones obtenidas a partir de las leyes de Kirchhoff permiten determinar el valor de las corrientes y voltajes en cada elemento de una red. Para ello, generalmente se escribe un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que puede ser resuelto por los métodos clásicos de solución. Las incógnitas corresponden a las corrientes de la red. Una vez determinadas las corrientes, se pueden establecer los valores de voltaje y la potencia suministrada o consumida en cada componente del circuito.

Leyes de Kirchhoff en la solución de una red eléctrica

El procedimiento a seguir para resolver una red eléctrica, mediante el uso de las leyes de Kirchhoff, puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Se asignan direcciones *arbitrarias* a las corrientes en las distintas ramas de la red. *Una rama es una parte de un circuito entre dos nodos consecutivos*. En aquellas ramas donde existan fuentes de voltaje, es conveniente dibujar la corriente atravesando la misma desde el terminal negativo hasta el positivo. La solución final del circuito arrojará la dirección real de las corrientes: si al resolver el sistema de

ecuaciones resultante, esta es positiva, la dirección real coincidirá con la asignada; si es negativa la dirección real de la corriente será opuesta a la asignada.

Hay que precisar que una vez asignadas las direcciones de las corrientes, los voltajes en las resistencias y sus respectivas polaridades quedan completamente determinadas: al terminal por donde entra la corriente se le pone el signo positivo, mientras que al terminal por donde sale, se le pone un signo negativo.

2. Se utiliza la primera ley de Kirchhoff para escribir una o más ecuaciones de nodos. El número de ecuaciones de nodo a escribir dependerá de la estructura de la red y será tal que, en conjunto con las ecuaciones de malla, permita tener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Ya hemos dicho que a las corrientes que entran a los nodos se les asocia con signos positivos, mientras que a las que salen de los nodos se les asignan signos negativos.

3. Se utiliza la segunda ley de Kirchhoff para escribir ecuaciones de malla en un número tal que complemente el número de ecuaciones de nodo para formar un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Para las mallas es conveniente tomar un sentido de recorrido, bien sea en el sentido de giro de las agujas del reloj o en sentido contrario al mismo. Previo al recorrido, se han asignado las direcciones de las corrientes y, por lo tanto, las polaridades de los voltajes en cada resistor están definidas.

Si al realizar el recorrido nos encontramos con un signo positivo en un resistor, el voltaje correspondiente tendrá, también, un signo positivo en la ecuación de malla que se esté escribiendo. Si el signo conque nos encontramos es negativo, el voltaje correspondiente tendrá un signo negativo en la ecuación de malla. Cuando se trate de fuentes de voltaje pondremos un signo positivo o negativo, según nos encontremos con la polaridad positiva o negativa de la fuente cuando recorremos la malla.

Ejemplo 7.3

Para la red mostrada en la fig. 1.11, determina: **a)** La corriente en cada resistor. **b)** La potencia disipada en el resistor de $2\ \Omega$. **c)** El voltaje entre los puntos **a** y **c** de la red.

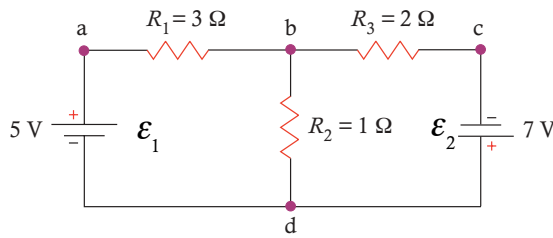


Fig. 7.11 Circuito para el ejemplo 7.3.

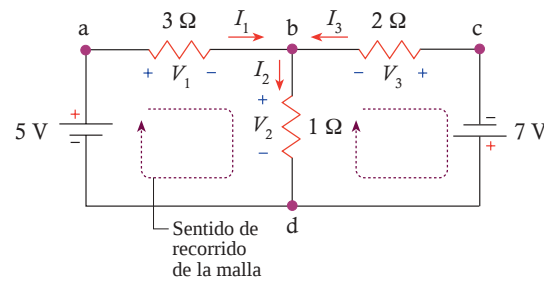


Fig. 7.12 Definición de corrientes y voltajes para la red del ejemplo 7.3.

Solución

a) El primer paso para resolver la red, es asignar arbitrariamente las direcciones de las corrientes. Esto se indica en la fig. 7.12. Como puede verse, las corriente I_1 e I_3 entran al nodo b y se les asignan signos positivos, mientras que a la corriente I_2 se le asigna signo negativo, por salir del nodo. Si observamos la red, caeremos en cuenta que esas son las únicas corrientes posibles en el circuito y, por lo tanto, es necesario generar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas para determinar sus valores. De acuerdo con la primera ley de Kirchhoff, se tiene:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (7.8)$$

Es necesario, entonces, plantear 2 ecuaciones adicionales. Estas pueden ser obtenidas a partir de la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff en las mallas $abda$ y $bcd b$. Previo al recorrido de las mallas y, según las direcciones de las corrientes, se marcan en la red las polaridades de los voltajes en los resistores, de acuerdo con lo mencionado anteriormente. Esto se muestra en la fig. 7.12.

Para la malla $abda$ partimos del punto a y recorremos la malla en el mismo sentido de giro de las agujas del reloj, según lo indicado por la trayectoria punteada de color morado:

$$V_1 + V_2 - \varepsilon_1 = 0 \quad (7.9)$$

Usando la ley de Ohm y sustituyendo valores:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow 3I_1 + I_2 = 5 \quad (7.10)$$

Para la malla $bcd b$ partimos del punto b y hacemos el recorrido señalado por la trayectoria morada:

$$-V_3 - \varepsilon_2 - V_2 = 0 \Rightarrow -2I_3 - I_2 = 7 \quad (7.11)$$

Agrupando las relaciones (7.8), (7.10) y (7.11) y ordenándolas en I_1 , I_2 , e I_3 :

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + I_2 + 0I_3 &= 5 \\ 0I_1 - I_2 - 2I_3 &= 7 \end{aligned}$$

El sistema anterior puede ser resuelto por cualquiera de los métodos conocidos. Utilizaremos el método de determinantes. En forma matricial, el sistema anterior puede representarse como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Si desarrollamos por la primera columna, el valor del determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2-0) - 3(2+1) + 0(0-1) = -11$$

Los valores de I_1 , I_2 , e I_3 se calculan a continuación:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0(-2-0) - 5(2+1) + 7(0-1)}{-11} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1(-10-0) - 3(0-7) + 0(0-5)}{-11} = -1 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1(7+5) - 3(-7-0) + 0(-7-0)}{-11} = -3 \text{ A}$$

Como los signos de las corrientes I_2 e I_3 son negativos, éstas tienen direcciones contrarias a las asumidas. Es decir, I_2 entra al nodo **b**, mientras que I_3 sale de ese nodo.

b) La potencia P_3 disipada en el resistor de 2Ω puede calcularse mediante la relación:

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 2 \cdot 3^2 = 18 \text{ W}$$

c) Para calcular el voltaje V_{ac} , vamos desde el nodo **a** hasta el nodo **c**, pasando por el nodo **b**. Así se tiene:

$$V_{ac} = V_1 - V_3 = 3I_1 - 2I_3 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 12 \text{ V}$$

El mismo resultado para V_{ac} pudo haberse obtenido si nos movemos del nodo **a** al nodo **c** haciendo el recorrido adc . En efecto:

$$V_{ac} = V_{ad} + V_{dc} = 5 + 7 = 12 \text{ V}$$

7.3 RESISTORES EN SERIE

Dos o más resistencias están asociadas en serie, si se conectan en la forma mostrada en la fig. 7.13. El voltaje aplicado, V , se reparte entre todas las resistencias, de manera que, de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff podemos escribir:

$$V_1 + V_2 + V_3 - V = 0 \Rightarrow V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (7.12)$$

De acuerdo con la ley de Ohm:

$$V_1 = R_1 I_1 \quad V_2 = R_2 I_2 \quad V_3 = R_3 I_3 \quad (7.13)$$

Como la corriente es la misma en el circuito,

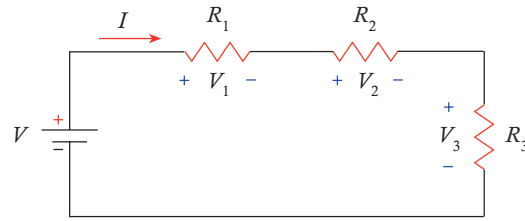


Fig. 7.13 Resistores en serie.

hacemos $I_1 = I_2 = I_3 = I$ y sustituimos en (7.12):

$$V = (R_1 + R_2 + R_3)I \quad (7.14)$$

Despejando la corriente I :

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (7.15)$$

El resultado anterior pone en evidencia una de las propiedades más relevante de una red en serie. Si comparamos la relación (7.15) con la ley de Ohm, vemos que la corriente I sería la misma si se conectara a la fuente de voltaje una única resistencia de valor:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 \quad (7.16)$$

Lo anterior nos permite afirmar:

La combinación de varios resistores en serie es equivalente a un solo resistor, cuyo valor es la suma de todos ellos.

A partir de la ley de Ohm, relación (7.13), y la expresión para la corriente en el circuito, relación 7.15, podemos determinar fácilmente el valor de los voltajes en cada resistor. En efecto:

$$V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} V \quad (7.17)$$

$$V_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} V \quad (7.18)$$

$$V_3 = R_3 I = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V \quad (7.19)$$

Las 3 relaciones anteriores, referidas a una red en serie, hacen que a ésta se le conozca como un *divisor de voltaje*, ya que el voltaje total, correspondiente, en este caso, a la fuente de alimentación, se divide proporcionalmente al valor de cada resistor.

Ejemplo 7.4

En el circuito mostrado en la fig. 7.14, determina: **a)** El resistor equivalente de R_1 , R_2 y R_3 . **b)** La corriente en el circuito. **c)** Los voltajes en los distintos resistores, mediante el concepto de divisor de voltaje. **d)** La potencia entregada por la batería. **e)** Las potencias disipadas en los resistores.

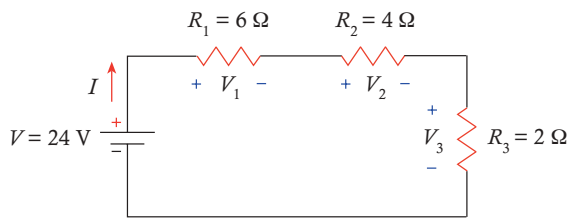


Fig. 7.14 Red en serie para el ejemplo 7.4.

Solución

a) Como los resistores están en serie, el resistor equivalente que los reemplazaría sería:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 = 6 \, \Omega + 4 \, \Omega + 2 \, \Omega = 12 \, \Omega$$

La red quedaría reducida a la de la fig. 7.15, que se muestra a continuación.

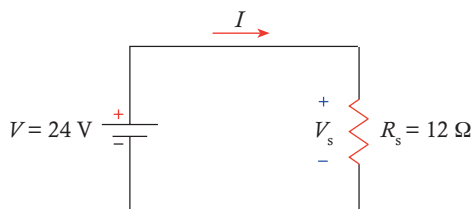


Fig. 7.15 Red equivalente en serie para la fig. 7.14.

b) De acuerdo a la fig. 7.15, podemos escribir:

$$I = \frac{V_s}{R_s} = \frac{V}{R_s} = \frac{24 \, \text{V}}{12 \, \Omega} = 2 \, \text{A}$$

c) Usando las relaciones (7.17), (7.18) y (7.19):

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} V = \frac{6}{12} \cdot 24 = 12 \, \text{V}$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} V = \frac{4}{12} \cdot 24 = 8 \, \text{V}$$

$$V_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V = \frac{2}{12} \cdot 24 = 4 \, \text{V}$$

Observa que $V_1 + V_2 + V_3 = 24 \, \text{V}$, como era de esperarse.

d) La potencia entregada por la batería es:

$$P = VI = 24 \, \text{V} \cdot 2 \, \text{A} = 48 \, \text{W}$$

e) De acuerdo con la relación $P = RI^2$, podemos obtener la potencia disipada en cada resistor:

$$P_1 = R_1 I^2 = 6 \cdot 2^2 = 24 \, \text{W}$$

$$P_2 = R_2 I^2 = 4 \cdot 2^2 = 16 \, \text{W}$$

$$P_3 = R_3 I^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \, \text{W}$$

Como era de esperarse, por el principio de conservación de la energía, la potencia entregada por la batería es igual a la disipada en los resistores. Esto es cierto, independientemente del tipo de red del cual se trate: siempre la energía entregada por la fuente de alimentación es igual a la que se consume en los resistores. Hay que recordar que hemos asumido que no hay pérdida de energía en los conductores que unen los distintos elementos de la red.

7.4 RESISTORES EN PARALELO

Dos o más resistores están asociadas en paralelo si se conectan de la forma mostrada en la fig. 7.16. En esta configuración, el voltaje es el mismo en todas las resistencias, mientras que la corriente total, I , se reparte entre las mismas:

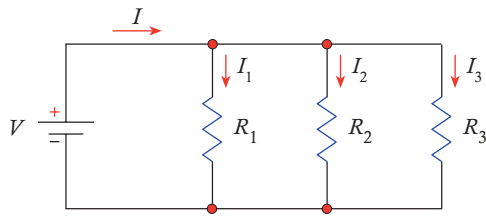


Fig. 7.16 Resistores en paralelo.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (7.20)$$

De acuerdo con la ley de Ohm y tomando en cuenta que $G = 1/R$:

$$I_1 = G_1 V \quad I_2 = G_2 V \quad I_3 = G_3 V \quad (7.21)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$I = (G_1 + G_2 + G_3)V \quad (7.22)$$

Si comparamos la expresión anterior con la ley de Ohm ($I = GV$), se observa que la corriente es la misma si los resistores en paralelo R_1 , R_2 y R_3 se reemplazan por otro resistor, cuya conductancia sea igual a la suma de las conductancias de dichos resistores. Observa que (7.22) también puede escribirse de la siguiente manera:

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V = \frac{V}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (7.23)$$

Si llamamos R_p al denominador de la expresión anterior:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (7.24)$$

O también:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (7.25)$$

Lo que es equivalente a decir que el recíproco de la resistencia equivalente puede ser obtenida sumando los recíprocos de las resistencias de R_1 , R_2 y R_3 .

Tenemos entonces 2 relaciones, (7.22) y (7.23), para determinar el valor de la corriente en 3 resistores conectados en paralelo: bien usando los valores de conductancia o los de resistencia. Estas relaciones pueden extenderse a n resistores en paralelo.

A redes como las mostradas en la fig. 7.16 se les conoce como *divisores de corriente*, porque la corriente total del circuito se reparte entre los resistores que la conforman. Las relaciones (7.21) y (7.22) permiten calcular cómo se divide la corriente I entre R_1 , R_2 y R_3 . En efecto, despejando V de (7.22):

$$V = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (7.26)$$

Sustituyendo en (7.21):

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} I \quad (7.27)$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} I \quad (7.28)$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} I \quad (7.29)$$

La determinación del valor de la resistencia equivalente de resistores en serie o en paralelo, permite reducir la complejidad de las redes eléctricas en muchos casos, facilitando la obtención de los valores de corrientes y voltajes desconocidos. Es pertinente señalar que las leyes de Kirchhoff, junto con otros métodos derivados de las mismas, dan lugar a procedimientos analíticos sistemáticos, que son apropiados para la aplicación de programas de computación, los cuales automáticamente calculan las corrientes y voltajes en una red, conocidos los elementos que las conforman y la manera cómo están interconectados.

Ejemplo 7.5

Para el circuito mostrado en la fig. 7.17, determina:

- a) La resistencia equivalente entre los terminales **b** y **c**. b) La resistencia equivalente entre los terminales **a** y **d**. c) Las corrientes I , I_2 e I_3 . d) El voltaje en R_1 . e) La potencia disipada por todos los resistores.

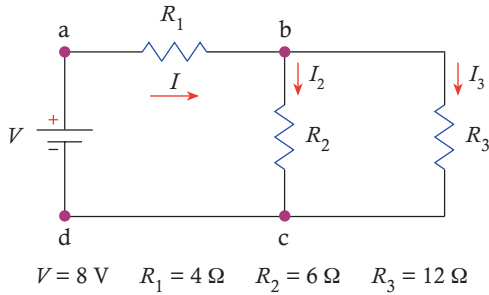


Fig. 7.17 Red eléctrica para el ejemplo 7.5.

Solución

a) Como R_2 y R_3 están en paralelo, podemos usar (7.22) o (7.25) para obtener la resistencia equivalente entre los nodos **b** y **c**. Si llamamos G_{23} a la combinación de las conductancias G_2 y G_3 y usamos (7.22), se tiene:

$$G_2 = \frac{1}{6} \quad G_3 = \frac{1}{12} \quad G_{23} = G_2 + G_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

Luego:

$$R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = 4 \Omega$$

Si hubiéramos usado (7.25):

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{23} = 4 \Omega$$

resultado idéntico al anterior.

b) El circuito equivalente que nos queda, al combinar R_2 y R_3 , se muestra en la fig. 7.18(a). El resistor R_{23} está en serie con R_1 y, por tanto, el circuito equivalente entre **a** y **d** es el mostrado en la fig.

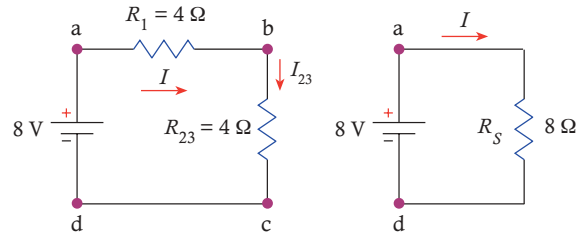


Fig. 7.18 Reducciones de la red eléctrica para el ejemplo 7.5.

7.18(b). La resistencia R_s está dada por:

$$R_s = (4 + 4) = 8 \Omega$$

c) La corriente I es:

$$I = \frac{8 \text{ V}}{8 \Omega} = 1 \text{ A}$$

I_2 e I_3 pueden ser calculadas usando (7.28) y (7.29):

$$I_2 = \frac{G_2}{G_2 + G_3} I = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \cdot 1 = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_2 + G_3} I = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \cdot 1 = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es calculando la caída de voltaje en R_{23} y, luego, aplicar la ley de Ohm para R_2 y R_3 . Como $I = I_{23}$ a (ver fig. 7.18) y $V_{bc} = V_{R_2} = V_{R_3}$, se tiene:

$$V_{bc} = V_{R_2} = V_{R_3} = R_{23} I = 4 \Omega \cdot 1 \text{ A} = 4 \text{ V}$$

Volviendo a la fig. 7.17, encontramos que:

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{4 \text{ V}}{6 \Omega} = \frac{2}{3} \text{ A} \quad I_3 = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{4 \text{ V}}{12 \Omega} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

d) De acuerdo con la ley de Ohm:

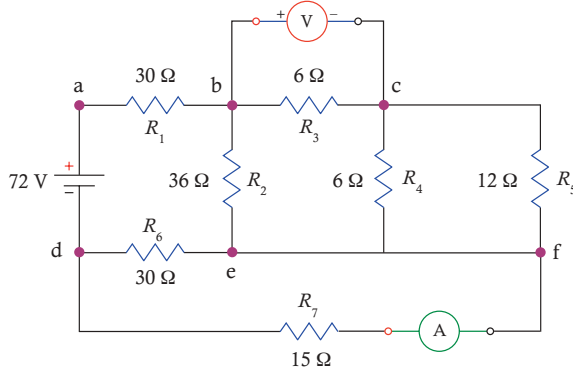
$$V_1 = V_{R_1} = R_1 I = (4 \Omega) \cdot (1 \text{ A}) = 4 \text{ V}$$

e) La potencia disipada por todos los resistores es la misma suministrada por la batería:

$$P = VI = (8 \text{ V}) \cdot (1 \text{ A}) = 8 \text{ W}$$

Ejemplo 7.6

a) ¿Qué potencia se disipa en los resistores de la fig 7.19? b) ¿Cuál es la lectura del amperímetro? c) ¿Cuánto mide el voltímetro?

**Fig. 7.19** Red eléctrica para el ejemplo 7.6.**Solución**

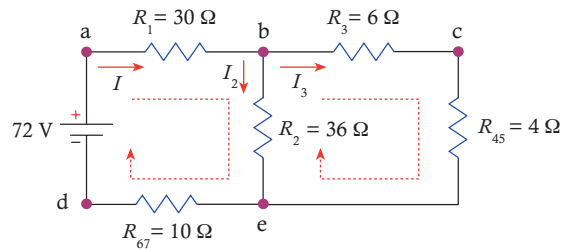
a) La potencia disipada en los resistores tiene que ser igual a la potencia suministrada por la batería. Si la corriente que pasa por la batería es I , la potencia que suministra es $P = VI$, donde $V = 72$ V. A fin de determinar I , utilizaremos reducción de resistencias y las leyes de Kirchhoff. Para ello, observamos que los resistores de 4Ω y 12Ω están en paralelo y su resistencia equivalente es:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4 \Omega$$

Similarmente, las resistencias R_6 y R_7 están en paralelo, ya que los nodos e y f son un mismo nodo:

$$R_{67} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = \frac{450}{45} = 10 \Omega$$

De esta forma, llegamos al circuito equivalente de la fig. 7.20, en el cual no tomamos en cuenta el amperímetro y el voltímetro. Para resolver el circuito, tomaremos el nodo b y las mallas *abeda* y *bceb* para escribir tres ecuaciones con tres incógnitas, mediante el uso de las leyes de Ohm y de Kirchhoff. Estas ecuaciones son las siguientes:

**Fig. 7.20** Reducción de la red eléctrica para el ejemplo 7.6.

$$\begin{aligned} I - I_2 - I_3 &= 0 && \text{(Nodo b)} \\ R_1 I + R_2 I_2 + R_{67} I &= 72 && \text{(Malla abeda)} \\ R_3 I_3 + R_{45} I_3 - R_2 I_2 &= 0 && \text{(Malla bceb)} \end{aligned}$$

Reduciendo términos y sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} I - I_2 - I_3 &= 0 \\ 40I + 36I_2 + 0I_3 &= 72 \\ 0I - 36I_2 + 10I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Usando la representación matricial para el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 40 & 36 & 0 \\ 0 & -36 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El valor del determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 40 & 36 & 0 \\ 0 & -36 & 10 \end{vmatrix} = 360 - 40(-10 - 36) = 2.200$$

Entonces:

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 72 & 36 & 0 \\ 0 & -36 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-72(-10 - 36)}{2.200} = \frac{3.312}{2.200} = 1,51 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 40 & 72 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{72 \cdot 10}{2.200} = \frac{720}{2.200} = 0,33 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 40 & 36 & 72 \\ 0 & -36 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-72 \cdot (-36)}{2.200} = \frac{2.592}{2.200} = 1,18 \text{ A}$$

Como ya conocemos I , la potencia entregada por la fuente (igual a la pérdida en los resistores) es:

$$P = VI = (72 \text{ V}) \cdot (1,51 \text{ A}) = 108,72 \text{ W}$$

b) El voltaje en el resistor R_{67} es igual al de los resistores R_6 y R_7 y está dado por:

$$V_{67} = V_6 = V_7 = R_6 I = (10 \text{ } \Omega) \cdot (1,51 \text{ A}) = 15,1 \text{ V}$$

La lectura del amperímetro, la cual indica la corriente en R_7 es:

$$I_7 = \frac{V_7}{R_7} = \frac{15,1 \text{ V}}{15 \text{ } \Omega} = 1,01 \text{ A}$$

c) La lectura del amperímetro corresponde al voltaje en el resistor R_3 . Luego:

$$V_3 = R_3 I_3 = (6 \text{ } \Omega) \cdot (1,18 \text{ A}) = 7,08 \text{ V}$$

7.5 MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA PARA RESOLVER UNA RED ELÉCTRICA

Este método, basado en las leyes de Ohm y de Kirchhoff, permite resolver de una forma sistemática las ecuaciones que determinan las corrientes en un circuito. Para describir el método, consideremos la red de la fig. 7.21.

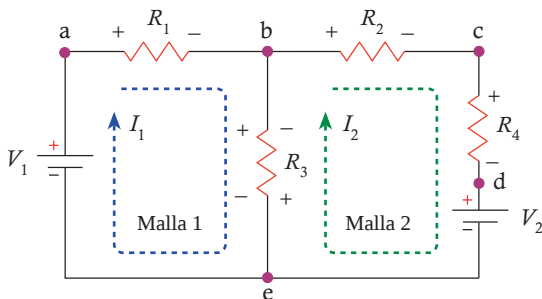


Fig. 7.21 I_1 e I_2 son corrientes que recorren las mallas 1 y 2, respectivamente.

En la red se establecen dos mallas, las cuales *no encierran a ninguna otra rama del circuito*. Esta condición es importante para evitar escribir más ecuaciones de las necesarias. Asimismo, se supone que las corrientes de malla, I_1 e I_2 recorren toda la malla a la cual pertenecen. *Es importante, para facilitar la aplicación del método, suponer que todas las corrientes recorren las mallas en un mismo sentido de giro*. Estas corrientes se simbolizan por las líneas punteadas en la fig. 7.21 y recorren las mallas en el sentido de giro de las agujas del reloj. Así, la corriente I_1 , correspondiente a la malla *abea*, se supone que pasa por los resistores R_1 y R_3 y por la batería V_1 . Similarmente, la corriente I_2 , correspondiente a la malla *bcdeb*, pasa por los resistores R_2 , R_3 y R_4 y por la batería V_2 . Esto significa que por el resistor R_3 pasan las corrientes I_1 e I_2 , en direcciones contrarias.

Para escribir las corrientes de malla, a partir de las cuales se calculan I_1 e I_2 , se recorre cada una de las mallas en el mismo sentido de la corriente de malla. Si al hacer el recorrido, nos encontramos con un signo positivo o negativo de la fuente de alimentación, éste será el signo a anteponer al valor del voltaje.

Para las mallas *abea* y *bcdeb* se tiene:

$$R_1 I_1 + R_3 I_1 - R_3 I_2 - V_1 = 0 \quad (\text{Malla } abea)$$

$$R_2 I_2 + R_4 I_2 + R_3 I_2 - R_3 I_1 + V_2 = 0 \quad (\text{Malla } bcdeb)$$

Observa cómo en el resistor R_3 , se producen caídas de voltaje con signos contrarios, debido a las direcciones opuestas de I_1 e I_2 . Arreglando términos en las ecuaciones anteriores:

$$(R_1 + R_3)I_1 - R_3 I_2 = V_1 \quad (7.30)$$

$$-R_3 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 = -V_2 \quad (7.31)$$

Las ecuaciones anteriores revelan la fortaleza del método: en la ecuación (7.30), correspondiente a la malla 1, la corriente I_1 aparece multiplicada por la suma de las resistencias R_1 y R_3 , las cuales aparecen en el recorrido de la malla; la corriente I_2 aparece multiplicada por la resistencia R_3 , la cual comparten las mallas 1 y 2, precedida de signo negativo. En la

ecuación (7.31), correspondiente a la malla 2, I_2 es multiplicada por la suma de todos los resistores que conforman esa malla, mientras que I_1 es multiplicada por la resistencia R_3 , compartida por las mallas 1 y 2, precedida de signo negativo. Los voltajes de las fuentes de alimentación figuran del lado derecho de las ecuaciones como términos independientes. Si expresamos las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones matriciales anteriores pueden ser escritas en forma general:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

donde:

R_{11} : suma de las resistencias de la malla 1.

$R_{12} = R_{21}$: resistencias compartidas entre las mallas 1 y 2.

R_{22} : suma de las resistencias de la malla 2.

En general, para un sistema de n mallas, (7.32) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Ejemplo 7.7

En el circuito de la fig. 7.22, determina: **a)** las corrientes de malla mostradas. **b)** Los voltajes en las resistencias de 3Ω , 5Ω y 1Ω . **c)** La potencia suministrada por la batería de 9 V . **d)** El voltaje entre los nodos **b** y **d**. **e)** El voltaje entre los nodos **a** y **e**.

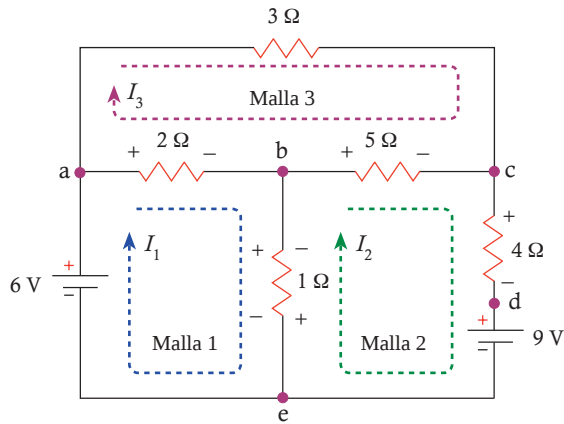


Fig. 7.22 Circuito para el ejemplo 7.7.

Solución

a) El circuito obedece a un sistema de ecuaciones de mallas dado, en forma general por:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$R_{11} = (2 + 1) \Omega = 3 \Omega \quad R_{12} = 1 \Omega \quad R_{13} = 2 \Omega$$

$$R_{21} = 1 \Omega \quad R_{22} = (5 + 4 + 1) \Omega = 10 \Omega \quad R_{23} = 5 \Omega$$

$$R_{31} = 2 \Omega \quad R_{23} = 5 \Omega \quad R_{33} = (3 + 5 + 2) \Omega = 10 \Omega$$

Sustituyendo valores en la expresión matricial con $V_1 = 6 \text{ V}$, $V_2 = -9 \text{ V}$ y $V_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -5 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El determinante del sistema podemos obtenerlo desarrollando la matriz por la primera columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -5 \\ -2 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 3(100 - 25) + 1(-10 - 10) - 2(5 + 20) = 155$$

Los valores de I_1 , I_2 e I_3 son:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -9 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}}{155} = \frac{6(100 - 25) + 9(-10 - 10)}{155}$$

$$I_1 = \frac{450 - 180}{155} = \frac{270}{155} = 1,74 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -9 & -5 \\ -2 & 0 & 10 \end{vmatrix}}{155} = \frac{-6(-10 - 10) - 9(30 - 4)}{155}$$

$$I_2 = \frac{120 - 234}{155} = \frac{-114}{155} = -0,74 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -1 & 10 & -9 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{155} = \frac{6(5 + 20) + 9(-15 - 2)}{155}$$

$$I_3 = \frac{150 - 153}{155} = \frac{-3}{155} = -0,019 \text{ A}$$

Como I_2 e I_3 son negativos, las direcciones reales de esas corrientes son contrarias a las asumidas.

b) Los voltajes en las resistencias de 3Ω , 5Ω y 1Ω están dados por:

$$V_3 = V_{ac} = 3(-0,019) = -0,057 \text{ V}$$

$$V_5 = V_{bc} = 5(I_2 - I_3) = 5 \cdot (-0,74 - 0,019) = -3,80 \text{ V}$$

$$V_1 = V_{be} = 1(I_1 - I_2) = 1 \cdot (1,74 + 0,74) = 2,48 \text{ V}$$

Nuevamente, debemos observar que los signos negativos indican que los voltajes tienen polaridad contraria a la asumida inicialmente.

c) Como I_2 tiene signo contrario al que se asumió, esa corriente sale de la batería de 9 V y, por tanto, suministra energía al circuito, dada por:

$$P_9 = 9 \cdot 0,74 = 6,66 \text{ W}$$

d) El voltaje entre los nodos **b** y **d** puede expresarse como:

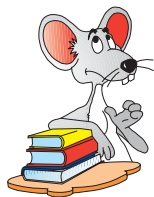
$$V_{bd} = V_{bc} + V_{cd} = 5(I_2 - I_3) + 4I_2 = 5(-0,74 + 0,019)$$

$$V_{bd} = 5 \cdot (-0,721) = -3,61 \text{ V}$$

Como el signo de V_{bd} es negativo, el nodo **d** está a un potencial más alto que el nodo **b**.

e) Como los nodos **a** y **e** corresponden a los terminales de la batería de 6 V , se tiene:

$$V_{ae} = 6 \text{ V}$$



PIENSA Y EXPLICA



7.1 ¿Qué es una red eléctrica? ¿Cuáles son los elementos pasivos y activos de una red?

7.2 Describe algunos usos de las redes eléctricas

7.3 ¿Qué son fuentes ideales de corriente y de voltaje? Da ejemplos de las mismas.

7.4 ¿Cómo se representa una batería real? ¿Qué es la resistencia interna de una batería?

- 7.5** ¿Por qué el término *fuerza electromotriz* es inapropiado para designar el voltaje generado internamente en una batería?
- 7.6** Explica cómo se usan amperímetros y voltímetros para medir corrientes y voltajes en un circuito.
- 7.7** Convencionalmente, ¿qué relación se establece entre el voltaje en un resistor y la corriente que circula por el mismo?
- 7.8** ¿Cuándo se dice que una fuente de voltaje suministra energía? ¿Cuándo recibe energía?
- 7.9** ¿Qué es la conductancia de un resistor? ¿En qué unidades se mide?
- 7.10** ¿Qué es un *nodo* en una red? ¿Qué es una *rama*?
- 7.11** Enuncia la primera ley de Kirchhoff. ¿De dónde se deriva esta ley? A los fines de la aplicación de esta ley, ¿qué convención se aplica a las corrientes que salen o entran a un nodo?
- 7.12** Enuncia la segunda ley de Kirchhoff. ¿De dónde se deriva esta ley? A los fines de la aplicación de esta ley, ¿qué convención se aplica a los voltajes en los resistores de una red?

- 7.13** Describe los pasos a seguir para aplicar las leyes de Kirchhoff en la solución de las redes eléctricas.
- 7.14** ¿Cuándo se dice que dos o más resistores están en serie? ¿Cuál es el valor equivalente de varios resistores conectados en serie?
- 7.15** ¿Cuándo se dice que dos o más resistores están en paralelo? ¿Cuál es el valor equivalente de varios resistores conectados en paralelo?
- 7.16** ¿Por qué a una combinación de resistores en serie se denomina *divisor de voltaje*? ¿Cómo puede calcularse el valor de cada voltaje en una combinación serie usando el concepto de divisor de voltaje?
- 7.17** ¿Por qué a una combinación de resistores en paralelo se denomina *divisor de corriente*? ¿Cómo puede calcularse el valor de cada corriente en una combinación paralelo usando el concepto de divisor de corriente?
- 7.18** Describe el método de las corrientes de malla para resolver una red eléctrica. ¿Qué consideraciones hay que tomar en cuenta para aplicar este método?



PROBLEMAS



- 7.1** Un resistor de $20\ \Omega$ se conecta a una batería de $9\ \text{V}$ y resistencia interna $0,2\ \Omega$. **a)** ¿Cuál es la corriente en el circuito? **b)** ¿Qué potencia se pierde en la batería?

- 7.2** Para el problema 7.1, **a)** ¿Qué potencia se pierde? **b)** ¿Qué potencia suministra la batería? **c)** ¿Cuál es el voltaje en el resistor externo?

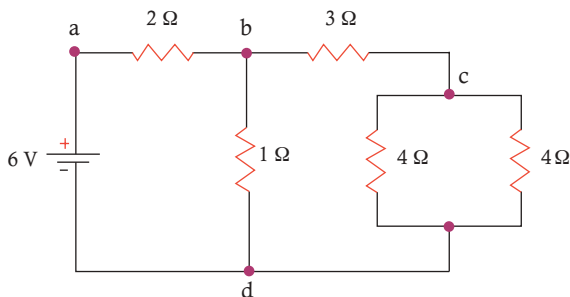


Fig. 7.23 Circuito para el problema 7.8.

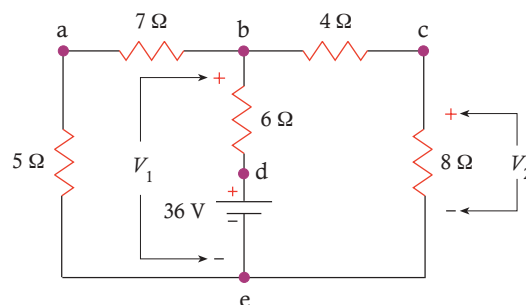


Fig. 7.24 Circuito para el problema 7.9.

7.3 Se conecta un resistor de $15\ \Omega$ a una fuente de voltaje de 60 V . Si la corriente debe estar limitada a 3 A , a) ¿Qué resistencia adicional en serie debe añadirse? b) ¿Cuál es la caída de voltaje en cada resistor? c) ¿Qué potencia suministra la fuente?

7.4 Se conectan en serie 3 resistores de valores $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$ y $R_3 = 2\ \Omega$. a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la combinación? b) Si los resistores se conectan a una batería de 50 V , ¿cuál es la corriente en el circuito? c) ¿Cuáles son los voltajes en cada resistor?

7.5 Se conecta una fuente a una combinación de dos resistores en serie, $R_1 = 200\ \Omega$ y $R_2 = 500\ \Omega$. Un voltímetro en R_1 muestra una lectura de 1 V . a) ¿Cuál es la corriente en R_2 ? b) ¿Cuál es el valor del voltaje en cada resistor?

7.6 3 resistores de valores $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$ y $R_3 = 9\ \Omega$ se conectan en paralelo a una fuente de 18 V . a) ¿Qué resistor puede reemplazar a la combinación? b) ¿Cuál es la corriente en cada resistor? c) ¿Qué potencia se pierde en R_3 ?

7.7 Dos lámparas de resistencia $80\ \Omega$ se conectan a una fuente de 120 V . Si la intensidad de iluminación depende de la potencia disipada por las lámparas y se requiere obtener la máxima iluminación, ¿se deben conectar en serie o en paralelo? Justifica tu respuesta.

7.8 a) Usando combinación de resistores en serie y en paralelo, determina la resistencia equivalente entre los terminales a y d de la fig. 7.23. b) ¿Qué potencia disipan los resistores de $2\ \Omega$ y $1\ \Omega$? c) ¿Qué potencia suministra la batería?

7.9 Usa el concepto de divisor de voltaje para calcular V_1 y V_2 en el circuito de la fig. 7.24 y, a partir de allí, determina la corriente en el resistor de $6\ \Omega$.

7.10 Usa el concepto de divisor de corriente para determinar la corriente el resistor de $32\ \Omega$ y el voltaje V_{ac} en la red de la fig. 7.25.

7.11 Mediante reducción de combinaciones en serie y en paralelo, determina el voltaje en cada uno de los resistores de la fig. 7.26.

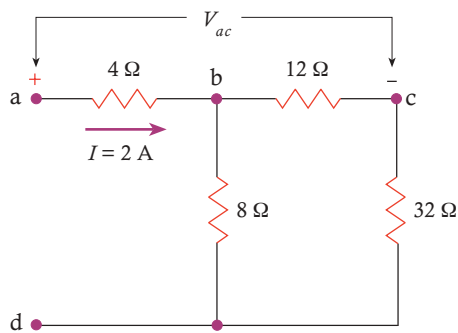


Fig. 7.25 Circuito para el problema 7.10.

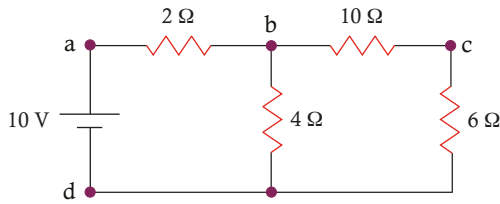


Fig. 7.26 Circuito para el problema 7.11.

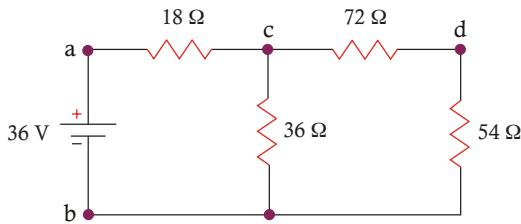


Fig. 7.27 Circuito para el problema 7.12.

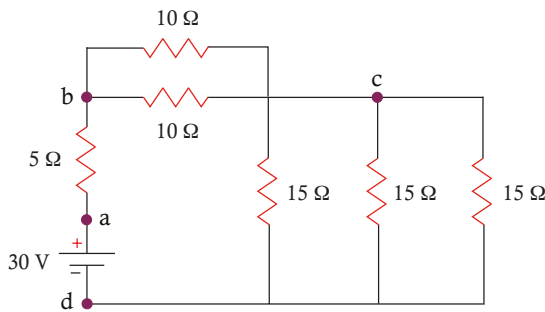


Fig. 7.28 Circuito para el problema 7.13.

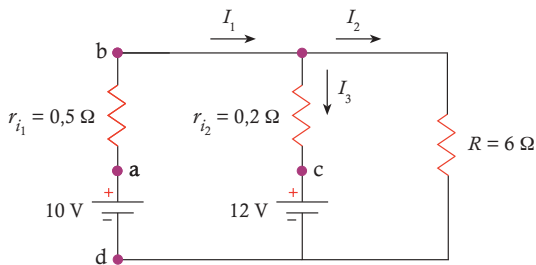


Fig. 7.29 Circuito para el problema 7.14.

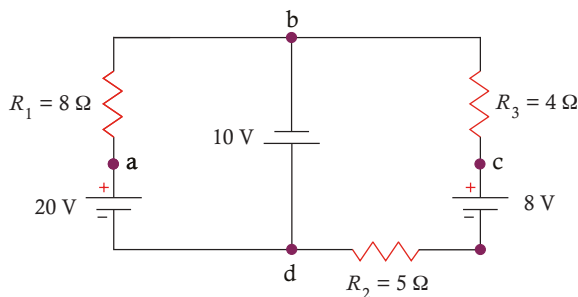


Fig. 7.30 Circuito para el problema 7.15.

7.12 a) Determina las corrientes y voltajes en los resistores de las redes de la fig. 7.27. **b)** ¿Cuál es la caída de voltaje entre los nodos **a** y **d**? **c)** ¿Qué potencia se disipa en el resistor de 54Ω ?

7.13 a) ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los terminales **a** y **d** de la batería en la red de la fig. 7.28? **b)** ¿Qué valor tiene la corriente en el resistor de 5Ω ? **c)** ¿Qué potencia suministra la batería?

7.14 a) Usa las leyes de Kirchhoff para determinar las corrientes en el circuito de la fig. 7.29. **b)** ¿Cuál es la caída de voltaje en la resistencia interna de la batería de 12 V ?

7.15 a) Determina las potencias suministradas por las baterías de la red de la fig. 7.30. **b)** ¿Cuál es el valor del voltaje entre los nodos **b** y **d**, V_{bd} ?

En los problemas 7.16 a 7.19 usa el método de las ecuaciones de malla para calcular corrientes y voltajes.

7.16 a) Calcula los voltajes en los resistores R_2 y R_4 de la red de la fig. 7.31. **b)** ¿Qué potencia suministra la batería V_2 ?

7.17 ¿Cuál es la potencia disipada en la red de la fig. 7.32? **b)** ¿Qué potencia suministran las baterías?

7.18 a) ¿Cuáles son los valores de las corrientes en las ramas **a-b** y **b-c** de la fig. 7.33? **b)** Determina los voltajes en los resistores de 2Ω y 4Ω .

7.19 a) En la fig. 7.34, determina el valor de las corrientes en los resistores. **b)** ¿Cuál es el valor de V_{bc} ?

7.20 Si la corriente en el resistor de 2Ω (fig. 7.35) es de 1 A , ¿cuánto vale V_1 ?

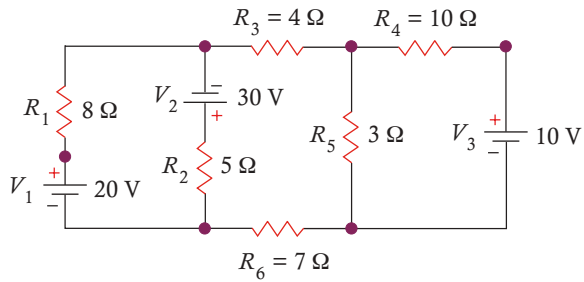


Fig. 7.31 Circuito para el problema 7.16.

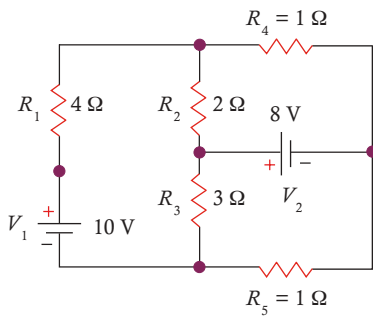


Fig. 7.32 Circuito para el problema 7.17.

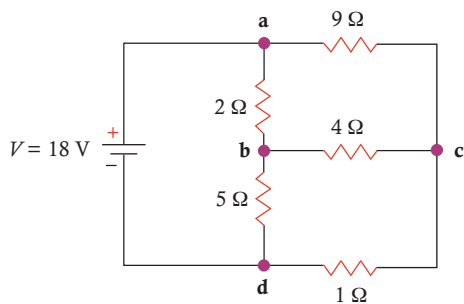


Fig. 7.33 Circuito para el problema 7.18.

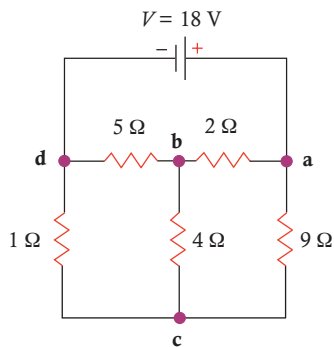


Fig. 7.34 Circuito para el problema 7.19.

7.22 ¿Cuál es el valor de la diferencia de potencial entre los puntos **m** y **n** de la fig. 3.36?

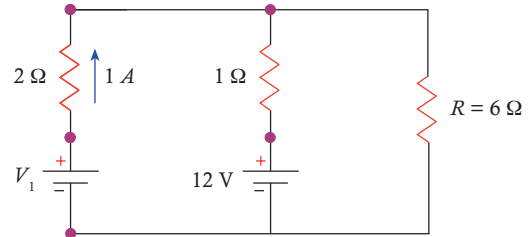


Fig. 7.35 Circuito para el problema 7.20.

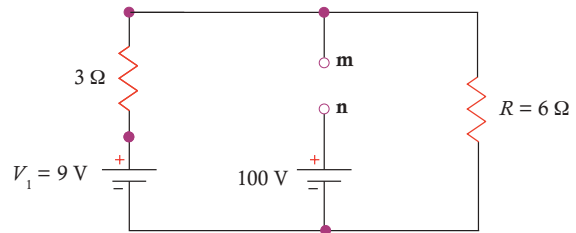
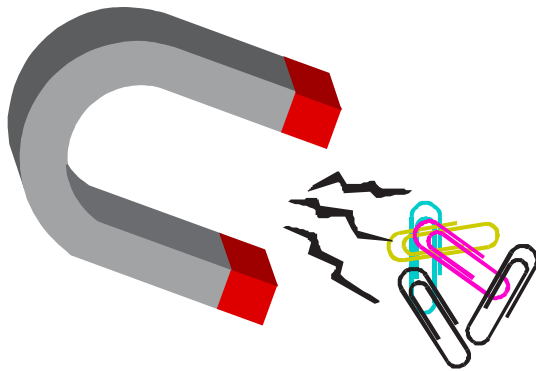


Fig. 7.36 Circuito para el problema 7.21.



CAPÍTULO 8

EL CAMPO MAGNÉTICO

8.1 MAGNETISMO

Se puede afirmar, con gran certeza, que todas las personas tienen un concepto vago, no científico, sobre lo que es un imán. Este concepto normalmente se expresa diciendo que cuando un trozo de hierro atrae a otro trozo de hierro, o bien se pega sobre una superficie metálica, dicho trozo de hierro es un imán.

Hace más de 2.000 años, los griegos descubrieron en una región denominada Magnesia, un tipo de piedra que tenía la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. En honor a esta región, la piedra recibió el nombre de magnetita. La composición química reveló que la magnetita es un mineral compuesto por óxido ferroso y óxido férrico, cuya fórmula es $FeO + Fe_2O_3$ o bien $FeO + Fe_3O_4$. A la magnetita también se le conoce con el nombre de *piedra imán*, lo cual hace referencia a que dicha piedra es un imán natural. De magnetita deriva el nombre *magnetismo*, con el cual se designa en la Física, al estudio de todos los fenómenos relacionados con los imanes. Los antiguos conocieron hechos sorprendentes de la magnetita. Por ejemplo, los chinos descubrieron, aproximadamente en el siglo XIII a. c., que si superponían una aguja de hierro por un determinado tiempo sobre una piedra de magnetita, la aguja adquiría las propiedades magnéticas de esta piedra. Así, inventaron la brújula, instrumento de inmenso valor para los navegantes, ya que la aguja inmantada señala en forma automática la dirección *norte-sur* del globo terráqueo. Esta orientación automática se debe a que la Tierra es también un

imán natural, fenómeno que para la época no tenía ninguna explicación, pero que más tarde fue comprobado y explicado.

El conocimiento ancestral, de que a partir de la magnetita es posible imantar trozos de hierro para obtener imanes artificiales, ha sido perfeccionado por la técnica moderna con el descubrimiento de las interacciones entre la electricidad y el magnetismo, lo cual ha permitido construir grandes imanes, utilizados en la construcción de generadores de corriente eléctrica, que proveen la energía necesaria para los grandes complejos industriales, para los sistemas de alumbrado eléctrico, requeridos por poblaciones enteras, así como la energía requerida para poner en funcionamiento la extraordinaria gama de aparatos electrodomésticos, de uso indispensable en la vida moderna.

De acuerdo con los historiadores de la ciencia, se sabe que en 1269 el francés Pierre de Maricourt descubrió que si colocaba una aguja imantada sobre la superficie de un imán natural, de forma esférica, como se muestra en la fig. 8.1, las direcciones de la aguja formaban líneas imaginarias que circundaban al imán, pero las mismas terminaban en dos puntos diametralmente opuestos entre sí. Estos puntos fueron denominados *polos del imán* o *polos magnéticos*. Después de estas experiencias, se profundizaron los estudios y experimentos sobre este particular y se pudo demostrar que cualquier imán, independientemente de su forma, tiene dos polos magnéticos. Estos polos reciben el nombre de *polo norte* y *polo sur*. La característica que distingue a estos polos, es que si se acercan dos polos iguales, los mismos se

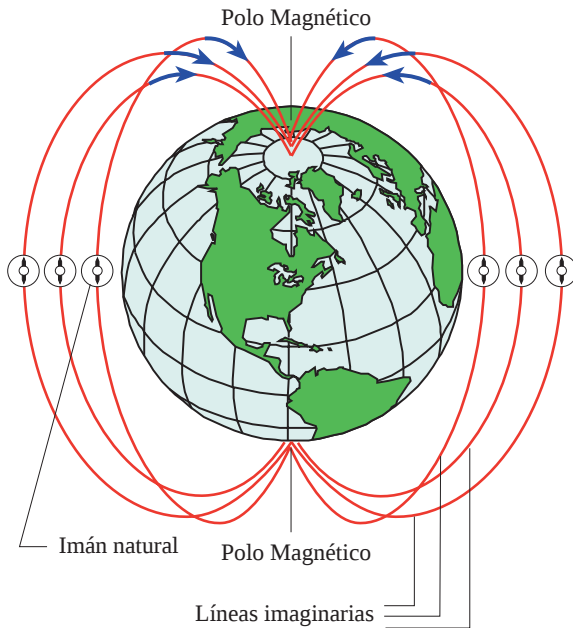


Fig. 8.1 Los imanes naturales, al ser colocados sobre la superficie terrestre, señalan hacia los polos magnéticos de nuestro planeta.

repelen y si se acercan dos polos diferentes, se atraen.

La fig. 8.2 muestra el comportamiento de dos imanes tipo de barra: polos diferentes se atraen y polos iguales se repelen. Este hecho revela que los imanes ejercen fuerzas entre sí, algo semejante al comportamiento de cargas eléctricas, pues dependiendo de los tipos de polos que se aproximen, pueden generarse, sin tocarse, fuerzas de atracción o fuerzas de repulsión. Estas fuerzas de interacción entre polos magnéticos, reciben el nombre de *fuerzas magnéticas*, al igual que las fuerzas generadas entre cargas eléctricas reciben el nombre de *fuerzas eléctricas*. Estas últimas han sido ya estudiadas en los capítulos precedentes.

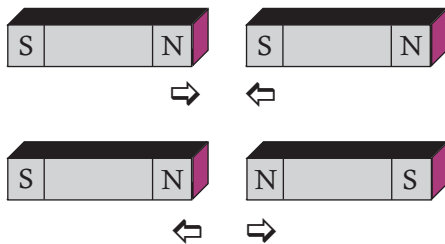


Fig. 8.2 Polos diferentes se atraen, mientras que polos iguales se repelen.

Es importante aclarar que, aun cuando la ley que rige la fuerza de interacción entre dos cargas eléctricas es similar a la ley que rige la fuerza entre dos polos magnéticos, ambas deducidas por Coulomb, existe una diferencia esencial: la carga eléctrica negativa representada por el electrón y la carga eléctrica positiva representada por el protón, pueden existir como entidades por sí mismas; es decir, pueden existir independientemente una de otra, cada una puede ser aislada en forma independiente, mientras que *los polos de un imán no pueden existir separados uno del otro*. Jamás ha podido aislarse un polo magnético. Si un imán de barra se divide en trozos cada vez más pequeños, como se muestra en la fig. 8.3, cada trozo resulta ser un imán completo con sus dos polos magnéticos. Si la división llegara a espesores de un átomo, e inclusive de un electrón, dicho átomo o electrón tendrían sus dos polos magnéticos, pues, como es sabido, estos entes son, en sí mismos, diminutos imanes.

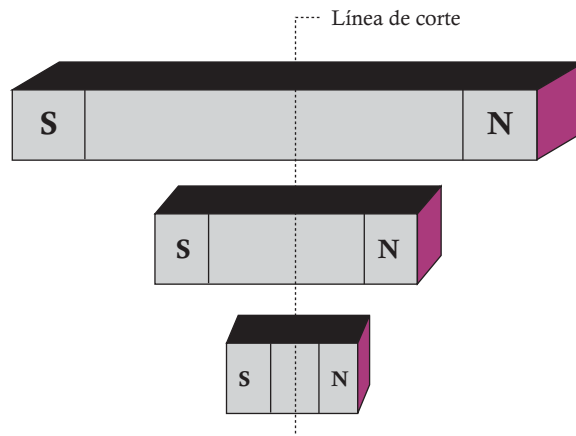


Fig. 8.3 Si se corta un imán por la mitad, se obtienen dos imanes completos, con su polo norte y polo sur. Si se continúa la división, se obtendrán tantos imanes como divisiones se hagan, llegando, teóricamente, hasta el límite del electrón, partícula que no es susceptible de ser dividida.

Los nombres de polo norte y polo sur de los imanes, surgieron al observar el comportamiento de un imán de barra, cuando se suspende con un hilo fino por su centro de gravedad; es decir, por su punto medio, tal como se muestra en la fig. 8.4. Cuando esto ocurre, el imán, después de varias oscilaciones, se orientará y quedará inmóvil con su polo norte en la dirección del polo norte geográfico de la Tierra y su polo sur en la dirección del polo sur geográfico terrestre. Esta orientación se debe a que la Tierra

¿No es al revés?

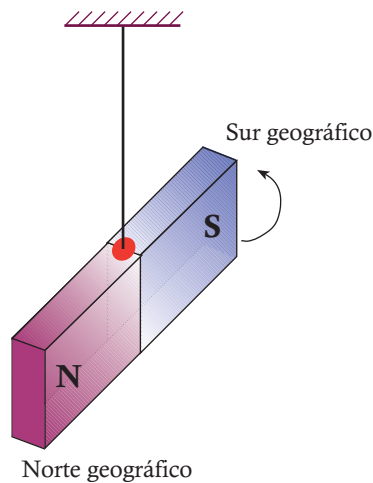


Fig. 8.4 Un imán de barra, suspendido de un hilo, oscilará hasta quedar inmóvil en la dirección norte-sur geográfico.

es un imán natural permanente, como se dijo antes, y por la atracción entre polos opuestos, el imán suspendido del hilo se orienta según la dirección norte – sur. Este comportamiento del imán, indica que el polo norte geográfico terrestre corresponde al polo sur magnético terrestre y que el polo sur geográfico corresponde a su polo norte magnético.

A finales del siglo XV, el médico inglés William Gilbert publicó el libro “De Magnete Magnetis que corporibus”, en el cual ampliaba los experimentos del francés Maricourt y, por primera vez, estableció que la Tierra era un imán natural permanente, al observar el comportamiento de la brújula que siempre toma la dirección norte-sur del globo terráqueo. Con su libro, W. Gilbert sentó las bases científicas del estudio del imán y en el mismo describió y formuló las principales características y propiedades de los imanes, tal como se conocen en la actualidad. Después de publicado el libro de W. Gilbert, pasaron más de cien años antes que se reiniciaran nuevas investigaciones de los fenómenos magnéticos, esta vez sobre nuevas bases. Dichas bases se establecieron al descubrir la relación que existe entre los fenómenos de la *electricidad* y el *magnetismo*, dos fenómenos físicos de la naturaleza, distintos, pero indisolublemente ligados. El estudio de la ligazón de estos dos fenómenos, dió lugar a la unificación de las ciencias de la electricidad y el magnetismo, que antes se estudiaban en forma independiente. Fue James Clerk Maxwell, mate-

mático y físico escocés, quien realizó la grandiosa síntesis teórico-matemática basada en los descubrimientos realizados por eminentes físicos como Coulomb, Ampere, Oersted y Faraday, sobre electricidad y magnetismo. Maxwell demostró que estos dos fenómenos son manifestaciones de una fuerza fundamental de la naturaleza: la *fuerza electromagnética*, con lo cual logró, por primera vez, la unificación de dos fuerzas de interacción aparentemente distintas. En lo adelante, esta unificación quedó identificada bajo el nombre de *electromagnetismo*, el cual fue descrito por Maxwell a través de un sistema de ecuaciones que, con el correr de los tiempos, se hizo inmortal, siendo su logro de tal magnitud, que se considera que está a la par de lo establecido por Isaac Newton en relación con la gravitación.

Antes de iniciar en detalle el estudio del campo magnético, vale la pena describir el significado que tiene en la Física actual el concepto de *campo*. Cuando Newton formuló la ley de la Gravitación Universal, se vió en la necesidad de aceptar que la fuerza de atracción entre dos cuerpos se realiza como una *acción a distancia* en el espacio vacío, sin ningún medio de transmisión material entre los cuerpos interactuantes. Sin embargo, la experiencia enseña que para poder transmitir algo, se requiere un medio. Por ejemplo, para transmitir una corriente eléctrica se utiliza un conductor metálico; el aire sirve de medio de transmisión del sonido, etc. De acuerdo con esta realidad física, era lógico que Newton se preguntara cuál debería ser el medio de transmitirse la gravitación. En su época no existía ninguna explicación y el mismo Newton tampoco la tenía, ni pudo establecerla. Como una solución nada convincente, propuso al éter, una sustancia invisible y elástica que llenaba todo el espacio y que permeaba todos los cuerpos, como agente de transmisión de la atracción gravitatoria. Esta proposición la lanzó Newton como algo transitorio, pues pensaba que en el futuro aparecería una teoría que explicaría, entre otras cosas, cuál es la naturaleza de la atracción gravitatoria y la naturaleza del medio de transmisión. En sus propias palabras Newton escribió: “Considero un absurdo admitir que un cuerpo, el cual se encuentra a cierta distancia de otro cuerpo, pueda interactuar con éste, a través del espacio vacío, sin ningún intermediario. Debido a ello, la gravedad debe originarse en un agente que actúa continuamente y conforme a leyes determi-

nadas”. El enfoque de la acción a distancia continuaba vigente, casi doscientos años, después de haberlo formulado Newton, y el mismo se aplicaba igualmente a las interacciones tanto entre cargas eléctricas, como entre los polos de imanes.

Fue Michael Faraday, luego de su descubrimiento de la inducción electromagnética, quien introdujo el concepto de líneas de fuerza, para representar un “algo” que existía en el espacio entre las cargas eléctricas e imanes. Así, las misteriosas fuerzas que se ejercían como *acciones a distancia*, entre los cuerpos, fueron reemplazadas por ese “algo” que se distribuía en forma continua por todo el espacio, alrededor y entre dichos cuerpos. Estas ideas de Faraday condujeron, finalmente, al concepto de *campo*, el cual, según los conocimientos actuales, cumple la función de ser el intermediario entre las fuerzas que se ejercen entre sí las cargas eléctricas, los imanes y los cuerpos materiales o gravitatorios. Así, cuando ocurre una interacción entre dos cargas eléctricas, se considera que la interacción realmente ocurre entre el campo eléctrico de una de las cargas y la otra carga. Actualmente, la denominación de líneas de fuerza introducida por Faraday para representar un campo, se ha sustituido por la denominación de *líneas de campo* ya que, físicamente, las fuerzas no tienen existencia material. Tal como se ha estudiado en Física primer año, ciclo diversificado, cuando ocurre una interacción entre dos cuerpos las fuerzas se presentan sólo en *pares*, siendo la fuerza una medida de esa interacción; en cambio, el campo es una identidad material, continua y presente ininterrumpidamente en el espacio que rodea a una carga eléctrica, a un imán o a un cuerpo gravitatorio. De acuerdo con el estado del conocimiento actual, el campo es un tipo especial de materia que, entre otras propiedades físicas, tiene *masa y energía*, siendo capaz de transformarse en partículas puntuales de materia, las que a su vez, generan nuevos campos. La estructura de estos campos, al igual que la estructura de las partículas subatómicas como el electrón, es totalmente desconocida y su esclarecimiento, por ser de alta complejidad, se tiene como un reto, tanto para la ciencia actual, como para la ciencia del mañana.

Cada campo tiene su nombre particular, dependiendo de la naturaleza del objeto que lo emite. Así, el campo que rodea a una carga eléctrica se deno-

mina *campo eléctrico*, el que rodea a un imán se denomina *campo magnético*, el que rodea a un objeto material gravitatorio, se denomina *campo gravitatorio*. La fig. 8.5 muestra las líneas de campo de un imán. Las líneas salen del polo norte del imán y se dirigen hacia su polo sur.

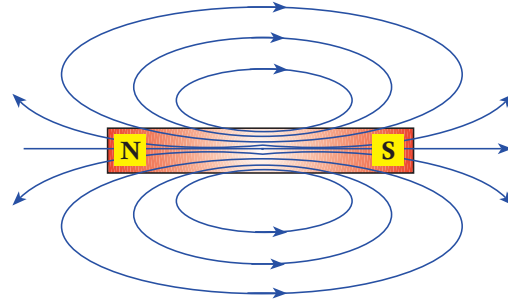


Fig. 8.5 Líneas del campo magnético de un imán tipo barra.

8.2 NATURALEZA DEL CAMPO MAGNÉTICO

Luego de refrescar el concepto general de campo, según los conocimientos actuales de la Física y, de acuerdo a las descripciones sobre los imanes y el magnetismo, se puede definir el *campo magnético* como sigue:

El campo magnético es un tipo especial de materia, que emana de un imán, el cual llena totalmente el espacio que lo rodea y tiene, entre otras, la propiedad de generar fuerzas denominadas fuerzas magnéticas, al interactuar con otro imán o con cargas eléctricas en movimiento.

Alejandro Volta, físico italiano, inventó la pila eléctrica en el año 1800. Dicho invento permitió hacer fluir una corriente eléctrica a través de un conductor. Esta circunstancia condujo a realizar experimentos con la corriente eléctrica y los imanes. Fue así como en el año 1820 Hans Christian Oersted, profesor de escuela danés, descubrió, cuando, junto a sus alumnos realizaba unos experimentos con un circuito eléctrico, que al acercar una aguja de brújula magnética al conductor, la misma era

desviada. Cuando se interrumpía la corriente, al abrir el circuito, la aguja de la brújula volvía a su posición original. En el experimento, Oersted utilizó un hilo de platino y lo dispuso según la orientación norte-sur, como se muestra en la fig. 8.6.

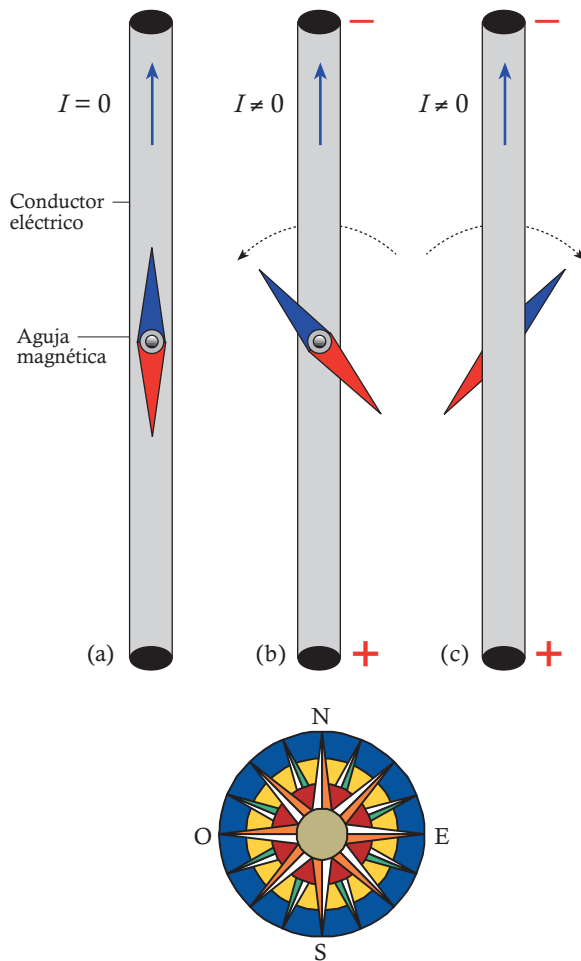


Fig. 8.6 Experimento de Oersted, mediante el cual estableció que existía una relación entre la presencia de una corriente y el campo magnético.

Colocó luego una aguja magnética por encima del conductor sin tocarlo. Estando abierto el circuito eléctrico, la aguja señalaba también la dirección *norte-sur*. Al cerrar el circuito y hacer pasar una corriente intensa por el hilo, el polo norte de la aguja era desviado en la dirección *oeste* como se muestra en la fig. 8.6 (b). Al abrir el circuito, la aguja regresaba de nuevo a su posición original *norte-sur*. Al repetir el experimento, pero colocando ahora la aguja magnética por debajo del conductor, fig. 8.8

(c), observó que al cerrar el circuito, el polo norte de la aguja era desviado en la dirección *este* y al abrir dicho circuito, la aguja volvía a su posición *norte-sur*. Recuerda que por ser el globo terráqueo un imán natural permanente, la aguja de la brújula está siempre en dirección *norte-sur*, si la misma no está interactuando con un campo magnético.

El experimento de Oersted demostró que entre el magnetismo y la electricidad existe una ligazón, siendo Ampere el primero en demostrar que se generan fuerzas de interacción debidas al movimiento de partículas cargadas; es decir, *una corriente eléctrica produce siempre un campo magnético a su alrededor*. Así, se estableció que el magnetismo está relacionado con la presencia de una corriente eléctrica, nunca con la electricidad estática.

Hay que advertir que toda partícula cargada produce fuerzas de interacción a través de su campo eléctrico, y la magnitud de esas fuerzas depende de la magnitud de las cargas y de la distancia entre las mismas. En cambio, cuando las partículas cargadas entran en movimiento se produce un *nuevo tipo de interacción*, la cual se distingue de la anterior, porque su magnitud depende no sólo de la magnitud de las cargas y la distancia, sino de la *velocidad* con que se mueven dichas cargas. Una corriente eléctrica que circula por un conductor crea entonces, a su alrededor, un campo magnético y este campo, interactúa, a través de la denominada *fuerza magnética*, con imanes y con cargas eléctricas que estén en movimiento.

Doce años después del descubrimiento de Oersted, Faraday encontró que se producía una corriente instantánea en un circuito, cuando en otro circuito próximo se establecía o se interrumpía una corriente. Un poco más tarde, se descubrió que se producía, igualmente, una corriente eléctrica cuando se acercaba o se alejaba un imán de un circuito. También se comprobó que bastaba con variar la intensidad del campo del imán para producir la corriente en el circuito sin tener que mover el imán.

Con estos extraordinarios descubrimientos y con el desarrollo subsiguiente del conocimiento sobre la estructura del átomo, se ha llegado a concluir que el campo magnético es el producto del movimiento de los electrones en los átomos de un material.

Se sabe que los electrones se mueven en órbitas alrededor de los núcleos de los átomos y, por ser cargas eléctricas en movimiento, además de generar un campo eléctrico, según la ley de Coulomb, producen a su alrededor un minúsculo campo magnético, perpendicular al movimiento. Aparte del movimiento orbital de los electrones alrededor del núcleo, los mismos rotan sobre un eje imaginario que pasa por su centro. Este movimiento es el llamado *spin* del electrón, el cual crea, con esta rotación, otro campo magnético perpendicular al primero. La fig. 8.7 muestra el esquema del movimiento de rotación o spin del electrón. Estas propiedades del electrón lo caracterizan como el más diminuto imán de la naturaleza, por lo cual se le tiene en la Física como el dipolo magnético fundamental. Normalmente, el campo producido por el electrón, en su movimiento alrededor del núcleo, es más débil que el campo producido por el movimiento de rotación o spin. Hay que agregar que no siempre los electrones rotan en el mismo sentido. Cuando dos electrones rotan en el mismo sentido, el campo producido por ellos se incrementa, pero si rotan en sentido contrario, el campo se anula. Este hecho explica por qué la mayoría de los objetos no manifiestan propiedades magnéticas, aun cuando, en realidad, todas las sustancias en la naturaleza, son capaces de interactuar frente a una determinada magnitud de un campo magnético $\vec{B}$. No obstante, existen algunos materiales, entre los que se encuentran hierro, el níquel, el cobalto, el

manganeso y el cromo, en los cuales el campo magnético generado por los electrones en rotación no se anula y, como consecuencia, pueden formar imanes permanentes: se les conoce como materiales *ferromagnéticos*.

8.3 FUERZA DE INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

La descripción del campo magnético, por ser una sustancia material, como se ha explicado antes, sólo puede ser hecha en forma cuantitativa u operacional; es decir, únicamente se puede describir a través de herramientas matemáticas, ya que no es posible hacer una descripción cualitativa del mismo, pues no se conocen detalles sobre su estructura material real. Por ello, no es posible reducirlo a conceptos más sencillos, de tal manera que pueda ser descrito físicamente con términos de uso común.

De acuerdo con lo señalado antes, la descripción cuantitativa, se inicia señalando que el campo magnético se representa en Física mediante el símbolo $\vec{B}$, con lo cual se está indicando que es un vector y, por lo tanto, tiene un módulo y una dirección. La dirección de un campo magnético, en cualquier punto del espacio, se puede determinar por la dirección de la aguja magnética de una brújula situada en ese punto. Este hecho natural nos permite, por ejemplo, trazar las líneas del campo magnético de un imán de barra, utilizando una brújula

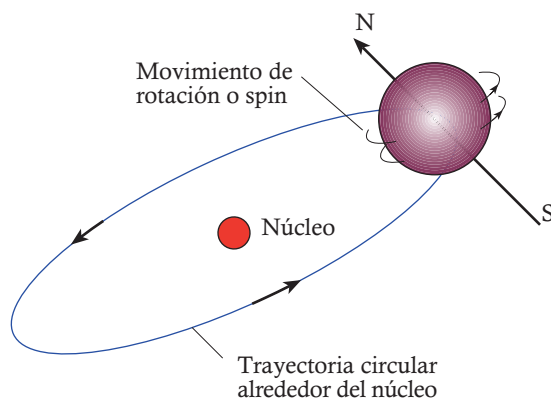


Fig. 8.7 Movimiento circular y de rotación del electrón. El campo magnético creado por el movimiento de rotación alrededor de su eje es mayor que el campo creado por el movimiento orbital.

Cualquier campo magnético, tanto el producido por un imán natural, como el producido artificialmente al hacer circular una corriente por un conductor, puede ser puesto de manifiesto utilizando una partícula cargada puntual, como un protón o un electrón, y haciendo que la misma se mueva dentro del campo a una velocidad $\vec{v}$. Una vez que la partícula entra en el espacio ocupado por el campo y, siempre que su desplazamiento no sea paralelo o antiparalelo a la dirección del campo $\vec{B}$, se produce automáticamente una *fuerza de interacción magnética*, entre dicho campo y la partícula. Dicha fuerza de interacción se simboliza por $\vec{F}_{mag}$ y es un fenómeno sorprendente y extraordinario de la naturaleza, todavía no cualitativamente explicado. La fuerza

magnética $\vec{F}_{mag.}$, como fuerza al fin, es un vector que tiene su módulo y su dirección. Dicha fuerza presenta, además, las siguientes propiedades:

- La magnitud de la $\vec{F}_{mag.}$, ejercida por el campo magnético sobre la partícula, es proporcional a la carga q de la partícula, a su rapidez v , a la magnitud del campo magnético B y al $\text{sen}\theta$ donde θ es el menor ángulo formado por las direcciones de los vectores $\vec{B}$ y $\vec{v}$. En particular, cuando la partícula se mueve en una dirección paralela o antiparalela al campo, es decir cuando $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, la fuerza $\vec{F}_{mag.}$ sobre la partícula es cero.
- La dirección de la $\vec{F}_{mag.}$ depende de la dirección del campo magnético $\vec{B}$ y del signo de la carga de la partícula. En cualquier caso, excepto cuando $\vec{F}_{mag.}$ es cero, lo cual ocurre cuando $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, la $\vec{F}_{mag.}$ es siempre perpendicular al plano formado por $\vec{B}$ y $\vec{v}$ y se comporta como una fuerza de acción lateral sobre la partícula, como se muestra en la fig. 8.8 (a). Si la carga q de la partícula es positiva, la dirección de la $\vec{F}_{mag.}$ sobre ésta, es opuesta a la dirección de la $\vec{F}_{mag.}$ ejercida sobre una partícula con carga negativa y que se mueve en idéntica dirección y a la misma velocidad. La dirección de la $\vec{F}_{mag.}$ sobre una partícula negativa se muestra en la fig. 8.8 (b).

Todas estas propiedades de la fuerza de interacción entre el campo magnético $\vec{B}$ y una carga de prueba positiva que se mueve dentro del campo, se pueden representar en forma matemática por la ecuación:

$$\vec{F}_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.1)$$

La relación (8.1), es la expresión del *producto vectorial* o *producto cruz* de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. De acuerdo con las reglas del producto vectorial, el cual será descrito brevemente, la magnitud de la fuerza magnética viene dada por:

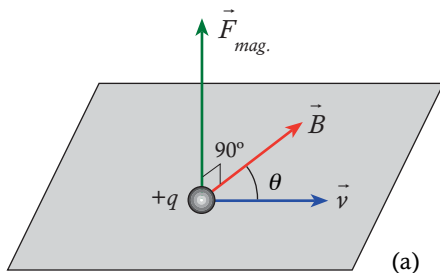
$$F_{mag.} = qvB\text{sen}\theta \quad (8.2)$$

donde, como se dijo antes, θ es el menor ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Para ver con claridad cómo la expresión vectorial de la relación (8.1) interpreta operacionalmente a la interacción entre el campo magnético y la partícula en movimiento dentro del campo, se estima importante refrescar la definición matemática del producto vectorial de dos vectores, así como sus principales propiedades.

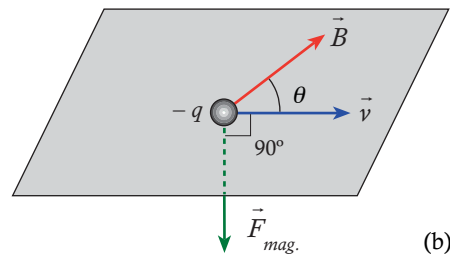
Producto vectorial de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, como se muestra en la fig. 8.9, se define el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, como otro vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$, es el producto de los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, multiplicado por el seno del ángulo θ entre ellos. Siempre se toma el menor ángulo entre los dos vectores para expresar el módulo. Entonces, el vector $\vec{C}$ viene definido



(a)

Fig. 8.8 Dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético $\vec{B}$ con velocidad $\vec{v}$: a) Carga positiva. b) Carga negativa.



(b)

Creo que las direcciones de las fuerzas están intercambiadas en la fig. 1.10

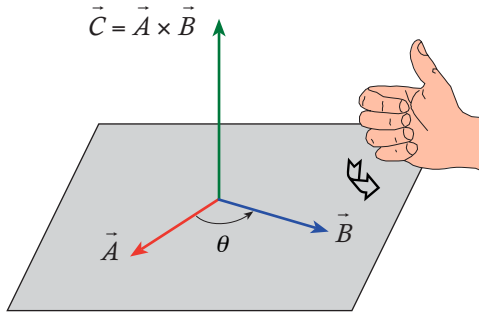


Fig. 8.9 El producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es un tercer vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. La magnitud de $\vec{C}$ se define como $AB\sin\theta$, donde θ es el ángulo menor entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La dirección de $\vec{C}$ se determina usando la regla de la mano derecha, tal como se muestra en la figura.

por:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (8.3)$$

y su módulo es

$$C = AB\sin\theta \quad (8.4)$$

Para determinar la dirección del vector $\vec{C}$ existen varias reglas prácticas, siendo una de ellas la *regla de la mano derecha*. La fig 8.9 muestra cómo se aplica esta regla. Así, la dirección de $\vec{C}$ se obtiene apuntando primeramente los cuatro dedos de la mano a lo largo de $\vec{A}$. Luego, se enrollan los dedos como si quisiéramos girar $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, a través del ángulo θ . El pulgar extendido indica la dirección $\vec{C}$. La definición del producto $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ comporta dos partes: el módulo y la dirección, las cuales deben ser siempre especificadas. El módulo se obtiene a partir de la relación (8.4) y la dirección mediante la regla de la mano derecha.

Otra variación de la regla de la mano derecha, se muestra en la fig. 8.10. En este caso, se apunta el dedo índice en la dirección de la velocidad de la partícula y el dedo medio en la dirección del campo magnético. El pulgar indicará la dirección de la fuerza sobre la partícula.

El producto vectorial no es conmutativo. Por lo tanto, si se intercambia el orden de los vectores, se obtiene otro vector que tiene el mismo módulo, pero

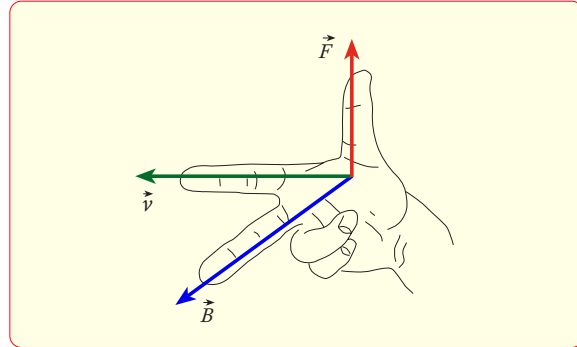


Fig. 8.10 Los dedos índice y medio indican las direcciones de la velocidad de la partícula y del campo magnético respectivamente. El dedo pulgar indica la dirección de la fuerza.

dirección opuesta. Si se tiene un vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, el producto vectorial $\vec{B} \times \vec{A}$ será otro vector, por ejemplo el vector $\vec{D}$, el cual se escribe como $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$. El módulo será, de acuerdo con la relación (8.4), $D = BA\sin\theta$. Para hallar la dirección de $\vec{D}$ se aplica, igualmente, la regla de la mano derecha, pero en este caso, se supone que $\vec{B}$ es el que gira hacia $\vec{A}$ en el mismo sentido de las agujas del reloj, como se ilustra en la fig. 8.11. De lo expuesto, se concluye que el vector $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ tiene dirección opuesta al vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ y, puesto que tienen mismo módulo, podemos escribir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (8.5)$$

La dirección del vector $\vec{C}$, tal como fue determinada, imaginando que el vector $\vec{A}$ gira en sentido

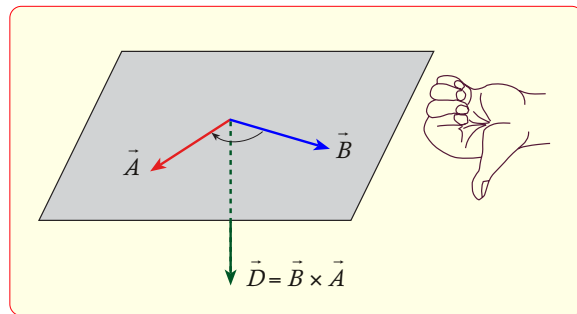


Fig. 8.11 Producto vectorial $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$. La dirección del vector $\vec{D}$ se obtiene aplicando la regla de la mano derecha.

contrario de las agujas del reloj hacia el vector $\vec{B}$, se considera como positiva, y la dirección del vector $\vec{D}$, imaginando que $\vec{B}$ gira en el sentido de las agujas del reloj hacia $\vec{A}$, es una dirección negativa.

Propiedades del producto vectorial de dos vectores

- Si $\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{B}$, $\theta = 90^\circ$ y como $\sin 90^\circ = 1$, el módulo del producto vectorial es $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
- Si los dos vectores son paralelos, $\theta = 0^\circ$, o si son antiparalelos, $\theta = 180^\circ$. En cualquier caso, $\sin \theta = 0$. Por lo tanto, $|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$, por lo que el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B} = 0$.

Se ha establecido que la fuerza magnética, ejercida por un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento, está dada por $\vec{F}_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Esta ecuación expresa que si una carga de prueba positiva q , que se mueve con velocidad $\vec{v}$, experimenta la acción de una fuerza, en esa región del espacio existe un campo magnético $\vec{B}$.

Es importante destacar que q es una cantidad definida y que $\vec{F}_{mag.}$ y $\vec{v}$ son cantidades que pueden ser medidas. Por lo tanto, a partir de estas consideraciones, es posible obtener el valor del módulo del campo magnético.

Si la partícula de prueba se mueve con la velocidad $\vec{v}$ perpendicular al campo $\vec{B}$ ($\theta = 90^\circ$, $\sin \theta = 1$), la partícula experimenta la máxima fuerza ejercida por el campo. De acuerdo a la relación (8.2),

$$F_{mag.} = qvB \quad (8.6)$$

En la fig. 8.12 se muestra este caso. Un imán de herradura mantiene entre sus polos un campo magnético de magnitud constante y una partícula positiva se desplaza perpendicularmente al campo. Como consecuencia de la interacción entre la

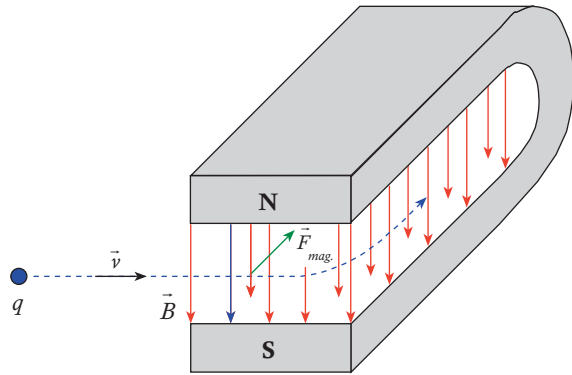


Fig. 8.12 Fuerza ejercida por el campo magnético sobre una partícula que se mueve a una velocidad $\vec{v}$, perpendicular a dicho campo.

partícula y el campo, surge una fuerza que desplaza a la partícula en un ángulo de 90° con respecto al plano que forman $\vec{v}$ y $\vec{B}$.

Cuando la magnitud de $\vec{v}$ tiende a cero, la magnitud de $\vec{F}_{mag.}$ también tiende a cero, y es totalmente cero cuando $\vec{v} = 0$.

Si la velocidad de la partícula es paralela o antiparalela al campo $\vec{B}$ ($\theta = 0$ o $\theta = 180^\circ$), $\vec{F}_{mag.}$ es nula, pues en este caso:

$$F_{mag.} = qvB \sin 0^\circ = 0 \quad F_{mag.} = qvB \sin 180^\circ = 0$$

La dirección de $\vec{F}_{mag.}$ se determina, tal como se explicó para el producto vectorial, aplicando la regla de la mano derecha.

Dado que la fuerza $\vec{F}_{mag.}$, ejercida por un campo $\vec{B}$ sobre una partícula cargada en movimiento, siempre es perpendicular a $\vec{v}$, el trabajo realizado por $\vec{F}_{mag.}$ sobre la partícula es cero, ya que como sabemos una fuerza realiza trabajo sobre un objeto, si el mismo se mueve en la dirección de la fuerza o su componente rectangular. Lo anterior podemos demostrarlo considerando un desplazamiento $\Delta \vec{x}$ en un tiempo Δt , en la trayectoria de la partícula. El trabajo realizado por $\vec{F}_{mag.}$ sobre la partícula sería, según la definición de trabajo:

$$W = \vec{F}_{mag.} \cdot \Delta \vec{x}$$

Es decir, el trabajo está dado por el producto escalar de los vectores $\vec{F}_{mag.}$ y $\Delta \vec{x}$. Como $\Delta \vec{x} = \vec{v} \Delta t$, se tiene:

$$W = \vec{F}_{mag.} \cdot \vec{v} \Delta t = \Delta t (\vec{F}_{mag.} \cdot \vec{v})$$

Puesto que:

$$\vec{F}_{mag.} \cdot \vec{v} = F_{mag.} v \cos \theta$$

nos queda:

$$W = \Delta t (F_{mag.} v \cos \theta)$$

Como $\theta = 90^\circ$ y $\cos 90^\circ = 0$, el trabajo realizado por el campo magnético es nulo. Como una consecuencia importante de este hecho, *la fuerza magnética de un campo magnético uniforme no puede cambiar ni la rapidez ni la energía cinética de una partícula cargada, únicamente puede cambiar la trayectoria de su movimiento*. Hay que enfatizar que, aun cuando el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre una partícula es cero, dicha fuerza sí acelera la partícula, ya que la aceleración puede tener lugar, tanto por un cambio en su rapidez como en su dirección: a pesar de que la rapidez no cambia, hay un cambio en su dirección, el cual indica variación de velocidad y, en consecuencia, aceleración. Como veremos más adelante, *toda partícula cargada, que se desplaza en un campo magnético uniforme, perpendicularmente al mismo, desarrolla siempre una trayectoria circular*.

La unidad de medida del campo magnético en el SI, se denomina *tesla* la cual puede ser relacionada con otras unidades básicas del SI a partir de la relación (8.6):

$$B = \frac{F_{mag.}}{qv} \Rightarrow 1 \text{ T} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad (8.7)$$

El tesla es una unidad muy grande, por lo que en la práctica se usa con más frecuencia el *gauss* (G), unidad que no es del SI, y está relacionada con el tesla por la equivalencia:

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$$

8.4 EXPRESIÓN MATRICIAL DEL PRODUCTO VECTORIAL

Ya establecimos cómo podemos determinar el módulo y la dirección del producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo θ : al primero lo calculamos mediante el producto $AB \sin \theta$, mientras que la dirección la determinamos usando la regla de la mano derecha.

Otra alternativa para establecer tanto el módulo como la dirección del producto vectorial la proporciona la expresión matricial de esa operación. En este caso, se tiene:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Donde a_x , a_y y a_z son las componentes vectoriales de $\vec{A}$ y b_x , b_y y b_z son las componentes vectoriales de $\vec{B}$. Desarrollando el determinante por la primera fila:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Es importante destacar lo siguiente, en relación con la expresión anterior:

1. El producto $\vec{A} \times \vec{B}$ dado por la expresión (8.8) contiene tanto la información del módulo, como del ángulo del vector resultante.
2. En el caso de la fuerza ejercida por el campo magnético sobre una carga, el vector $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y tendrá, por tanto, una sola componente con dirección tal que forme un ángulo de 90° con respecto a dicho plano. Esto significa que si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ yacen en el plano X – Y con componentes según los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$, el vec-

tor correspondiente al producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ tendrá sólo componente según el vector $\vec{k}$.

Ejemplo 8.1

Un electrón se mueve en el espacio con una velocidad de $6 \cdot 10^6$ m/s según el eje X. De repente, penetra en un campo magnético, de magnitud 0,042 T, que forma un ángulo de 75° con relación al eje X, como se muestra en la fig. 8.13. Determina: a) La magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre el electrón. b) La aceleración del electrón. c) El cambio de su energía cinética.

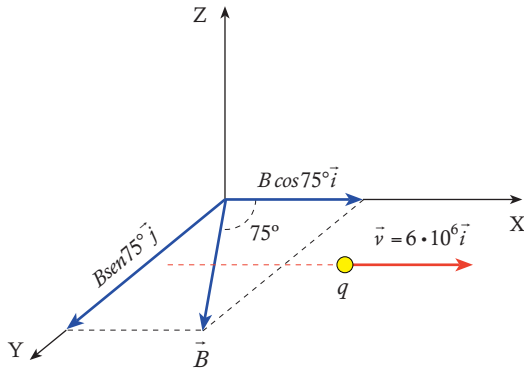


Fig. 8.13 Ubicación de los vectores velocidad y campo magnético para el ejemplo 8.1

Solución

a) Como el electrón se mueve en dirección del eje X su velocidad puede expresarse vectorialmente como:

$$\vec{v} = 6 \cdot 10^6 \vec{i}$$

El campo magnético lo escribimos según sus componentes rectangulares:

$$\vec{B} = B \cos 75^\circ \vec{i} + B \sin 75^\circ \vec{j}$$

Como $B = 0,042$ T, $\cos 75^\circ = 0,2588$ y $\sin 75^\circ = 0,9659$, se tiene:

$$\vec{B} = 0,0109 \vec{i} + 0,0406 \vec{j}$$

De acuerdo a (8.8):

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0,0109 & 0,0406 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la tercera columna:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (6 \cdot 10^6) \cdot (0,0406) \vec{k} = 0,24 \cdot 10^6 \vec{k}$$

La fuerza sobre el electrón es:

$$\vec{F} = (-1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (0,24 \cdot 10^6) \vec{k} = 3,84 \cdot 10^{-14} (-\vec{k}) \text{ N}$$

De acuerdo con el resultado, la fuerza tiene una magnitud de $3,84 \cdot 10^{-14}$ N y sigue la dirección del vector unitario $-\vec{k}$; es decir, está orientada según el eje negativo de las Z.

b) La aceleración se calcula usando la segunda ley de Newton. Hay que recordar que la aceleración tiene la misma dirección de la fuerza. Como la masa del electrón es $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, la magnitud de la aceleración es:

$$a = \frac{F_{\text{mag.}}}{m_e} = \frac{3,84 \cdot 10^{-14}}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 4,22 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2$$

c) Tal como se explicó antes, la fuerza magnética, por ser perpendicular al campo $\vec{B}$, no produce ningún trabajo sobre la carga en movimiento. Por lo tanto, la energía cinética del electrón, no sufre ningún cambio.

8.5 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR QUE TRANSPORTA UNA CORRIENTE

Se ha establecido que una partícula cargada, moviéndose en un campo magnético es sometida a la acción de una fuerza, cuya dirección es perpendicular al plano conformado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Una corriente eléctrica en un conductor es un conjunto muy grande de electrones en movimiento y, tal como se describió antes, sobre cada uno de estos se ejerce una fuerza magnética lateral,

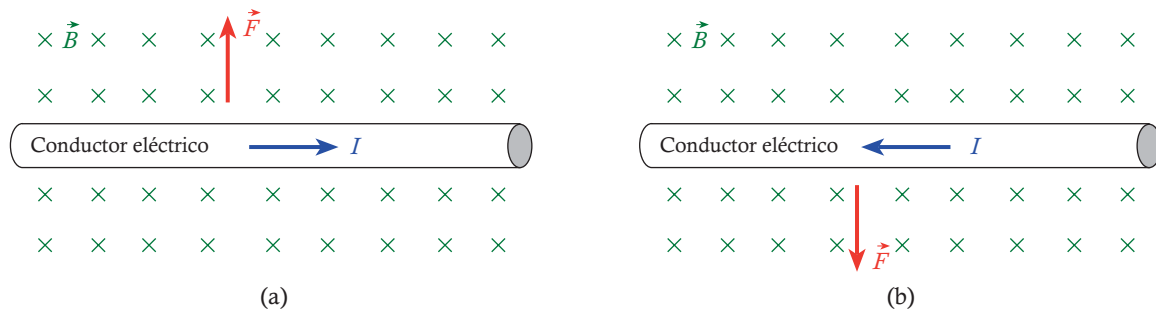


Fig. 8.14 Fuerza sobre un conductor que transporta una corriente: a) La fuerza magnética actúa hacia arriba. b) La fuerza magnética actúa hacia abajo.

si el conductor se encuentra en un campo $\vec{B}$. Estas fuerzas magnéticas halan entonces los electrones lateralmente, haciendo que ocurran choques en una misma dirección, entre éstos y los átomos del conductor, producto de lo cual, esta acción se transmite como una *fuerza neta lateral* sobre el conductor. Dicha fuerza es el resultado de sumar vectorialmente cada una de las fuerzas individuales a las que el campo magnético somete a los electrones.

En la fig. 8.14 se muestra lo que ocurre cuando un conductor que transporta una corriente es afectado por la presencia de un campo magnético. Las cruces en el dibujo indican que el campo penetra en el papel (si el campo saliese del papel sería representado por un punto, en lugar de una cruz). La corriente en el conductor y, por tanto, la velocidad de los electrones tiene dirección hacia la derecha. Si aplicamos la regla de la mano derecha, encontraríamos que la fuerza es hacia arriba. En la fig. 8.14 (b), la dirección de la velocidad es hacia la izquierda, el campo entra en el papel y la fuerza sobre el conductor es hacia abajo.

Con el fin de deducir una expresión cuantitativa de la fuerza que afecta a un conductor, sometido a un campo magnético consideremos la fig. 8.15. Un segmento de dicho conductor, de longitud ΔL y sección transversal A es recorrido por una corriente I , mientras se encuentra bajo la acción de un campo magnético uniforme que, de acuerdo con el dibujo, penetra en el papel.

Para calcular la fuerza neta lateral sobre el segmento de conductor, es necesario considerar todos los electrones móviles en el volumen del segmento del conductor considerado. El volumen del segmento de conductor es $A\Delta L$. En este volumen, habrá N electrones, donde $N = nA\Delta L$, siendo n , el número de electrones por unidad de volumen.

La fuerza magnética sobre un electrón se puede escribir como $f_{mag.} = qv_d B$, (puesto que el ángulo entre $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ es de 90°), donde q es la carga del electrón y $\vec{v}_d$ la velocidad de arrastre, la cual no es otra, que su velocidad media. La fuerza magnética total sobre el segmento de conductor es:

$$F_{mag.} = Nf_{mag.} = (nA\Delta L)(qv_d B) \quad (8.9)$$

Pero, de acuerdo con la relación (6.1):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$$

Sustituyendo en la relación anterior:

$$F_{mag.} = I \cdot \Delta L \cdot B \quad (8.10)$$

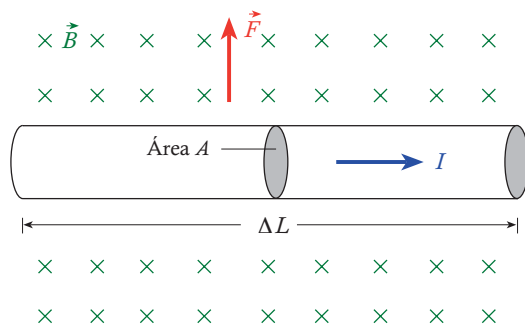


Fig. 8.15 Segmento de un conductor ubicado en un campo magnético. La fuerza magnética es la suma de las fuerzas sobre todas las cargas que circulan dentro de éste.

Expresión que indica la dependencia de la fuerza ejercida sobre un conductor recto, de longitud ΔL , por un campo magnético de magnitud constante y perpendicular al conductor.

Cuando el campo forma un ángulo θ con el conductor, se puede demostrar que la expresión para la fuerza sobre el mismo es:

$$F_{mag.} = I \Delta L B \sin \theta \quad (8.11)$$

Es importante advertir que las ecuaciones (8.10) y (8.11) se aplican sólo para un segmento recto de conductor, situado en un campo magnético uniforme. Tal como se dedujo para el caso del producto vectorial de dos vectores, la fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente puede escribirse como:

$$\vec{F}_{mag.} = I \Delta \vec{L} \times \vec{B} \quad (8.12)$$

donde $\Delta \vec{L}$ es un vector con la misma dirección del movimiento de las cargas. Como producto vectorial, (8.11) puede ser calculado mediante el uso del determinante de la relación (8.8).

Cuando el conductor es curvo, la longitud a considerar es el segmento recto entre dos puntos a y b , tal como es indicado en la fig. 8.16. Para este caso, la relación (8.11) puede extenderse a la siguiente forma:

$$\vec{F}_{mag.} = I \vec{L}_{ab} \times \vec{B} \quad (8.13)$$

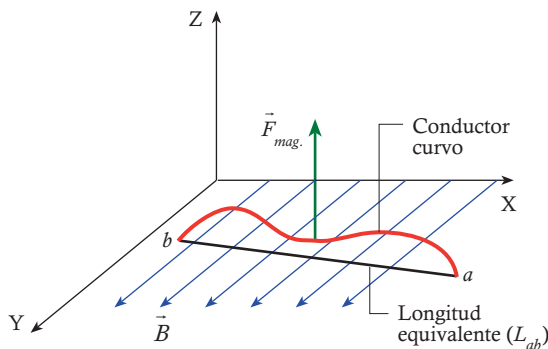


Fig. 8.16 Fuerza magnética sobre un conductor curvo, situado en un campo magnético uniforme. La fuerza magnética que actúa sobre el conductor curvo es equivalente a la fuerza que actúa sobre el conductor recto entre a y b .

Ejemplo 8.2

a) Un alambre recto de 2 m de longitud conduce una corriente de 10 A en la dirección del eje de las X en un campo magnético uniforme de 0,50 T en la dirección del eje Z. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza sobre el conductor? b) Si el ángulo entre el conductor y el campo magnético es de 40° , ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza sobre el conductor?

Solución

a) Sustituyendo los valores dados en la relación (8.10), obtenemos el módulo de la fuerza sobre el conductor:

$$F_{mag.} = I B \Delta L = (10 \text{ A}) \cdot (0,50 \text{ T}) \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ N}$$

Usando la regla de la mano derecha (el dedo índice indica la dirección del elemento vectorial $\Delta \vec{L}$ según el eje X, el dedo medio, señala la dirección del campo sobre el eje Z), vemos que el dedo pulgar señala la dirección de la fuerza según el eje Y positivo. Si Utilizamos la relación vectorial (8.12) con $I = -10$, $\Delta \vec{L} = 2\vec{i}$ y $\vec{B} = 0,5\vec{k}$:

$$\vec{F}_{mag.} = I \vec{B} \times \Delta \vec{L} = (-10) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}$$

OJO: consultar con Juan

Desarrollando el determinante por la segunda fila:

$$\vec{F}_{mag.} = (-10) \cdot [(-2) \cdot (0,5\vec{j})] = 10\vec{j}$$

De acuerdo con el resultado anterior, el módulo de la fuerza es 10 y su dirección coincide con el del eje positivo de las Y.

b) Para la condición dada, hacemos uso de la fórmula (8.11):

$$F_{mag.} = I B \Delta L \sin \theta = 10 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \sin 40^\circ = 6,43 \text{ A}$$

La dirección, de nuevo, es la del eje Y positivo. Se deja como ejercicio el uso de la forma matricial para determinar la magnitud y la dirección de la fuerza magnética.

8.6 FUERZA Y MOMENTO DE TORSIÓN SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Se ha descrito en las secciones anteriores el fenómeno que ocurre cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético. Dicha partícula experimenta una fuerza perpendicular al vector velocidad de la partícula y al vector campo magnético. A partir de este hecho, que constituyó un descubrimiento capital en la Física, se pudo comprobar que un conductor, por el cual circulan partículas cargadas y situado en un campo magnético, experimenta una fuerza lateral.

Si el conductor por el que fluye una corriente es una *espira*, en ciertas condiciones ésta podrá ser sometida a un momento de torsión o torque, la cual la puede hacer girar alrededor de un eje que pase por su centro. Este momento de torsión, capaz de generar un movimiento de rotación, se constituyó en el principio de funcionamiento de los motores eléctricos, máquinas sobre las cuales descansa, en buena medida, muchos de los procesos de manufactura de la industria a nivel mundial, así como la operación de gran número de máquinas de trabajo como grúas, tornos mecánicos, entre otras. Los usos de motores eléctricos van desde la industria ligera, productora de los artefactos eléctricos del hogar: licuadoras refrigeradores, lavadoras, etc, hasta la industria pesada y de los complejos sistemas de fabricación. En los procesos de refinación de petróleo se utilizan motores eléctricos desde los tamaños más pequeños, por ejemplo de 1/8 hp de potencia, hasta los más grandes de 5.000 hp. Estos últimos impulsan bombas que hacen circular por la maraña de tuberías de un complejo refinador, como el Complejo Refinador de Paraguaná, productos primarios como el petróleo y los secundarios derivados, como las gasolinas, naftas, fuel oil, y los diferentes aceites lubricantes de que se surte el inmenso parque automotor nacional.

Consideremos una espira de forma rectangular sometida a la acción de un campo magnético constante y por la cual fluye una corriente I , como se muestra en la fig. 8.17. El plano de la espira es paralelo a la dirección del campo magnético. Las longitudes de sus lados son a y b y su área es $A = ab$. Ahora bien, supongamos que la espira puede girar

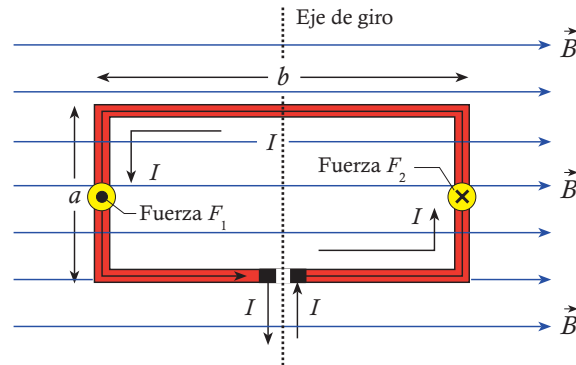


Fig. 8.17 Fuerza magnética sobre una espira por la cual circula una corriente I . El área de la espira es paralela al campo magnético. En el lado izquierdo de la espira, la fuerza sale del plano del papel (indicado por el círculo con el punto). En el lado derecho de la espira la fuerza entra en el papel (indicado por el círculo con la cruz).

libremente alrededor de un eje que pasa por su centro. Al circular una corriente eléctrica en la espira, la interacción entre el campo $\vec{B}$ y la corriente hace que se ejerzan fuerzas magnéticas sobre los cuatro lados de la espira. Dichas fuerzas pueden ser calculadas aplicando la ecuación (8.10) y sus direcciones se obtienen aplicando la regla de la mano derecha. En el lado izquierdo de la espira, de longitud a , el vector $\Delta\vec{L}$ está dirigido hacia abajo, el vector $\vec{B}$ está dirigido hacia la derecha y, por tanto, la fuerza F_1 , sobre ese lado, es un vector que sale de la página. En la fig. 8.17 la fuerza está representada por el círculo con el punto en el medio. En el lado derecho de la espira, el vector $\Delta\vec{L}$ tiene dirección hacia arriba, puesto que la corriente sube, el vector campo magnético está dirigido hacia la derecha y, como consecuencia, la fuerza F_2 , sobre ese lado, está dirigida hacia dentro del papel, lo cual es representado mediante el círculo con la cruz en el centro. El par de fuerzas generado hace girar a la espira en sentido contrareloj.

La magnitud de cada una de estas fuerzas, F_1 y F_2 , está dada por la relación (8.10):

$$F_1 = F_2 = IaB \quad (8.14)$$

La distancia desde los lados de longitud a al eje de giro es $b/2$ y el momento total de la fuerza sobre la

espira es la suma de los momentos de F_1 y F_2 :

$$\tau = F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \cdot \frac{b}{2} = (IaB) \frac{b}{2} + (IaB) \frac{b}{2} = IabB$$

como el área de la espira es $A = ab$:

$$\tau = IabB = IAB \quad (8.15)$$

lo cual nos dice que el momento total sobre la espira es proporcional a la corriente que circula por ella, a su área y a la magnitud del campo magnético.

Hay que mencionar que las fuerzas sobre los lados superior e inferior, de longitud b , son nulas. Para el lado superior, el vector $\Delta \vec{L}$ tiene dirección hacia la izquierda, mientras el campo magnético se dirige hacia la derecha. Es decir, el ángulo entre ambos vectores es 180° y, según la relación (8.11):

$$F_{mag.} = I\Delta L B \sin 180^\circ = 0$$

Para el lado inferior, tanto $\Delta \vec{L}$ como $\vec{B}$ se dirigen hacia la derecha; en consecuencia, el ángulo entre esos vectores es cero, por lo que la magnitud de la fuerza es, también, nula.

Veamos ahora un caso más general, en el cual el plano de la espira no es paralela al campo magnético. Para ello, utilizaremos la fig. 8.18. Una espira de lados a y b , por la cual circula una corriente I , proveniente de la batería conectada a la misma, está sometida a la acción de un campo magnético constante, creado por un imán fijo.

La fuerza magnética $\vec{F}_{mag.1}$, ejercida sobre el lado izquierdo de longitud a , tiene dirección hacia arriba, por ser este lado perpendicular al campo magnético $\vec{B}$. Entonces:

$$F_{mag.1} = IaB \sin 90^\circ = IaB$$

La fuerza $F_{mag.3}$, sobre el lado derecho, tiene dirección opuesta a la fuerza $\vec{F}_{mag.1}$ y su módulo es de igual magnitud. Observa que las fuerzas sobre los lados de longitud a son iguales y constantes e

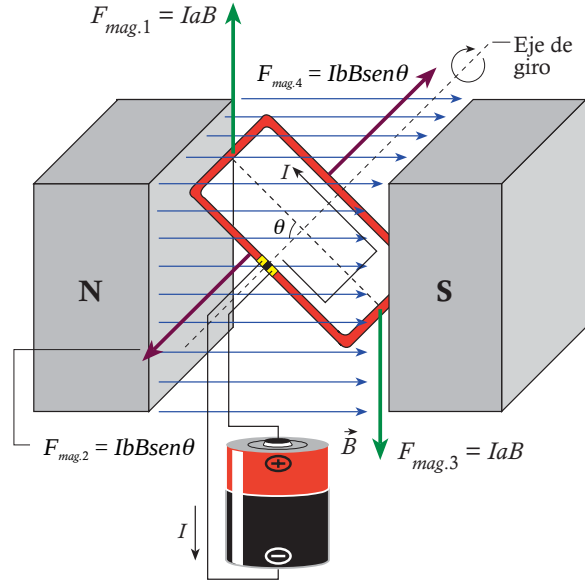


Fig. 8.18 La espira rectangular, de lados a y b y por la cual circula una corriente I , está inmersa en un campo magnético constante. El plano de la espira forma un ángulo θ con el campo.

independientes del ángulo entre el plano de la espira y $\vec{B}$, lo cual es consecuencia de la perpendicularidad de dichas fuerzas con el campo $\vec{B}$.

Por otra parte, la fuerza $\vec{F}_{mag.2}$ sobre el lado anterior, de longitud b , tiene dirección hacia afuera de la espira, en forma paralela al eje de rotación y su módulo es

$$F_{mag.2} = IbB \sin \theta \quad (8.16)$$

donde θ es el ángulo entre el plano de la espira y el campo magnético $\vec{B}$.

Finalmente, la fuerza $\vec{F}_{mag.4}$, sobre el lado superior de la espira, es de dirección opuesta a $\vec{F}_{mag.2}$ y tiene igual módulo.

Examinando la acción de las fuerzas sobre los cuatro lados de la espira, se puede ver que las que actúan sobre los lados de longitud a lo hacen en direcciones opuestas y, aun cuando pueden hacer girar la espira en el sentido de las manecillas del reloj, las mismas no pueden trasladar dicha espira, moviéndola de su

sitio. Por otro lado, las fuerzas que actúan sobre los lados de longitud b lo hacen sobre la misma línea de acción, pero en direcciones opuestas, por lo que se anulan. Como resultado, la suma de todas las fuerzas sobre la espira es cero. Por lo tanto, se puede afirmar que dicha espira está en equilibrio traslacional; es decir, la misma no se mueve del sitio por la acción de las fuerzas magnéticas, aun cuando podría girar sobre un eje que pase por su centro.

Obsérvese también que aunque la suma de todas las fuerzas sobre la espira es cero, la acción de éstas podrían deformar la espira, si la misma no es lo suficientemente rígida, ya que cada una actúa individualmente sobre un lado diferente de la espira.

Según el análisis precedente, las fuerzas magnéticas que actúan sobre los lados b , $\vec{F}_{mag.2}$ y $\vec{F}_{mag.4}$, lo hacen en dirección opuesta y en forma paralela al eje de rotación; por lo tanto, dichas fuerzas no pueden generar ningún efecto sobre el movimiento, que la espira puede hacer, alrededor de su eje de giro. Es decir, tales fuerzas no producen ningún momento de torsión.

En cambio, las fuerzas magnéticas sobre los lados de longitud a , al actuar a cierta distancia del eje de giro, producen un momento de torsión, que hacen rotar la espira, hasta que el plano de la misma se ponga perpendicular al campo. Cuando esto ocurre, la espira se queda quieta, no puede girar más, pues las fuerzas quedan actuando en sentidos contrarios pero sobre la misma línea de acción, donde no es posible ningún momento de torsión, pues el brazo de palanca se ha hecho igual a cero. Si por cualquier medio distinto de las fuerzas magnéticas, se hace desplazar la espira de esta posición, en cualquier sentido, se repetiría el movimiento de la espira, en forma similar al proceso descrito antes.

La fig. 8.19 es una vista conveniente de la espira por arriba del lado superior de longitud b para calcular el momento de torsión producido por las fuerzas $F_{mag.1}$ y $F_{mag.3}$. El ángulo entre el plano de la espira y el campo magnético es θ . Recuerda que el momento de torsión que aplica una fuerza sobre un cuerpo rígido el cual gira alrededor de un eje, se

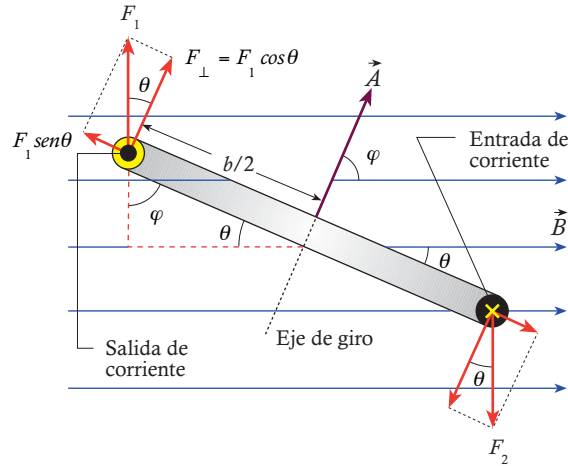


Fig. 8.19 En la espira de la fig. 8.18, sólo la componente $F_1 \cos \theta$ produce momento de giro en la misma.

define como: $\tau = F \cdot r$, donde F es la componente de la fuerza aplicada, perpendicular al eje de el objeto que gira y r es el brazo de palanca, la cual es la distancia desde la línea de acción de la fuerza que produce el momento de torsión hasta el eje de giro del cuerpo rígido. De acuerdo a la fig. 8.19, la fuerza que produce momento de giro es $F_1 \cos \theta$ y la distancia de esta fuerza al eje de giro es $b/2$. Por tanto, el momento de torsión es:

$$\tau_1 = F_1 \cdot \frac{b}{2} \cos \theta \quad (8.17)$$

Como $F_1 = F_{mag.1} = IaB$, se obtiene:

$$\tau_1 = IaB \frac{b}{2} \cos \theta \quad (8.18)$$

De igual modo, la fuerza $F_2 = F_{mag.3}$ produce un momento de torsión τ_2 sobre el otro lado de longitud a , de igual magnitud que τ_1 y en el mismo sentido, en torno al eje de rotación. Entonces, $\tau_1 = \tau_2$ y, por lo tanto, el momento de torsión neto, τ , producido por estas fuerzas magnéticas, es igual a:

$$\tau = IaB \frac{b}{2} \cos \theta + IaB \frac{b}{2} \cos \theta = IaB \cos \theta$$

$$\tau = IaB \cos \theta \quad (8.19)$$

Teniendo en cuenta que ab es el área A de la espira, se tiene, finalmente:

$$\tau = IAB \cos \theta \quad (8.20)$$

Ahora bien, de la fig. 8.19, vemos que los ángulos θ y φ son complementarios, por lo que $\cos \theta = \sin \varphi$. Usando esta igualdad, la relación anterior puede escribirse como:

$$\tau = IAB \sin \varphi \quad (8.21)$$

Observa que φ es, también, el ángulo que formaría un vector $\vec{A}$, perpendicular al plano de la espira, tal como se muestra en la fig. 8.19. Por tanto, la expresión (8.21) puede escribirse, en forma de un producto vectorial, de la manera siguiente:

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B} \quad (8.22)$$

Es decir, el momento es un vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La dirección de $\vec{A}$ se determina curvando 4 de los 5 dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente en la espira. El pulgar apunta en la dirección de $\vec{A}$.

La ecuación (8.22) es una forma elegante de presentar, a través de un instrumento matemático, como es el producto vectorial de dos vectores, la explicación operativa de un fenómeno natural, como son las fuerzas de interacción entre un campo magnético y una espira que conduce corriente.

Analizando la ecuación (8.22), se pueden evidenciar los siguientes hechos:

- El área $\vec{A}$ tal como aparece en la ecuación, no especifica la geometría de la espira, lo que quiere decir que es aplicable para cualquier forma: redonda, cuadrada, romboidal, etc.
- Si en lugar de una sola espira, añadimos N vueltas o espiras y las colocamos muy juntas, formando una bobina, cada vuelta tiene la misma área A y el momento neto de las fuerzas magnéticas de interacción entre un campo magnético uniforme y una bobina, por la cual circula una corriente, será, en base a la relación

(8.22), igual a:

$$\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B} \quad (8.23)$$

y su módulo será:

$$\tau = NIAB \sin \varphi \quad (8.24)$$

- El momento de torsión tiene su valor máximo cuando el ángulo entre el vector campo $\vec{B}$ y el vector área $\vec{A}$ es $\varphi = 90^\circ$ ya que $\sin 90^\circ = 1$ y, por lo tanto,

$$\tau_{\max} = NIAB \quad (8.25)$$

Cuando el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es 0° , $\sin \varphi = 0$ y el momento de torsión es cero; esto es:

$$\tau_{\min} = 0 \quad (8.26)$$

Ejemplo 8.3

La espira de la fig. 8.20, de lados $a = 10$ cm y $b = 20$ cm, es recorrida por una corriente de 0,80 A. Si la espira puede rotar alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de magnitud uniforme e igual a 4 T, ¿cuál es la magnitud y la dirección del torque sobre la espira, cuando su plano forma un ángulo de 37° con el campo?

¿Es torque igual al momento de torsión? Consultar con Juan.

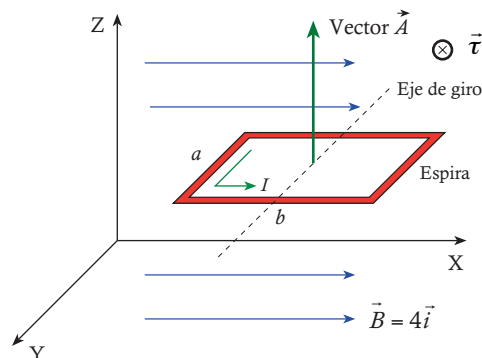


Fig. 8.20 Espira de corriente para el ejemplo 8.3.

Solución

El área de la espira es $A = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$ m². Si la

misma está en la posición mostrada en la fig. 8.20, el ángulo θ entre el plano de la espira y el campo es de 0° , mientras que el ángulo φ entre el vector $\vec{A}$ y el campo es de 90° . Para esta posición, podemos usar la expresión (8.22) con $\vec{B} = 4\vec{i}$ y $\vec{A} = 0,02\vec{k}$ para determinar tanto la magnitud como la dirección del torque. Desarrollando el determinante $\vec{A} \times \vec{B}$ por la segunda fila:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0,02 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-0,02)(-4\vec{j}) = 0,08\vec{j}$$

Entonces:

$$\vec{\tau} = (-0,80) \cdot 0,08\vec{j} = -0,064\vec{j} \text{ Nm}$$

Este resultado significa que el módulo del torque es de 0,064 Nm y su dirección es la del eje Y negativo.

Cuando el ángulo del plano de la espira es de 37° con el campo magnético, hacemos uso de la fig. 8.21 para establecer que el ángulo entre $\vec{A}$ y el campo es de $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$. En este caso, el vector $\vec{A}$ tiene componentes según los ejes X y Z y puede ser expresado como:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_z = 0,02 \cos 53^\circ \vec{i} + 0,02 \sin 53^\circ \vec{k}$$

$$\vec{A} = 0,01204\vec{i} + 0,01597\vec{k}$$

Como el campo magnético es $\vec{B} = 4\vec{i}$ el momento de torsión se puede calcular mediante el

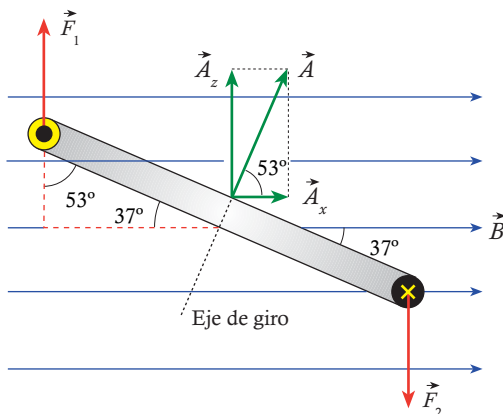


Fig. 8.21 Ejemplo 8.3: el plano de la espira forma un ángulo de 37° con el campo.

determinante:

$$\vec{\tau} = 0,80 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,01204 & 0 & 0,01597 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = (-0,80) \cdot (-\vec{j})(-4 \cdot 0,01597) = -0,051\vec{j} \text{ Nm}$$

Ejemplo 8.4

Una bobina circular, ubicada en un campo magnético uniforme de 0,035 T, puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro y tiene un diámetro de 45 mm y 200 vueltas. Una corriente de 75 mA fluye por el alambre de la bobina. Si en un instante dado, el vector área $\vec{A}$ de la bobina, forma un ángulo de 60° con el vector campo $\vec{B}$, como se muestra en la fig. 8.22, calcula: **a)** La magnitud del momento de torsión τ ejercido por la fuerza magnética del campo sobre la bobina. **b)** La dirección del momento de torsión. **c)** Si se invierte el sentido de la corriente, ¿cuál es la dirección del momento de torsión τ ?

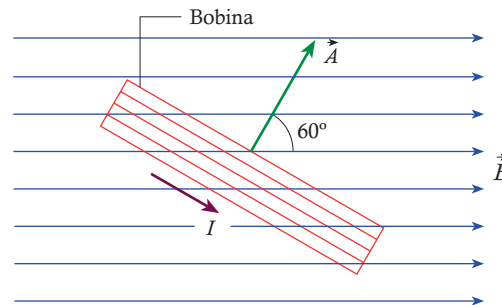


Fig. 8.22 Ejemplo 8.4: bobina en un campo magnético.

Solución

a) La magnitud del momento $\vec{\tau}$ se obtiene aplicando la relación (8.24), $\tau = NIAB \sin \varphi$ con $I = 75 \cdot 10^{-3} \text{ A}$, $B = 35 \cdot 10^{-3} \text{ T}$. El área de la sección transversal de la bobina es:

$$A = \pi \cdot \frac{D^2}{4} = \pi \cdot \frac{(45 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1.590,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Sustituyendo valores:

Consultar con Juan.

(y es perpendicular tanto al vector $\vec{A}$ como al vector $\vec{B}$, ???)

Agregar dirección de τ .

¿Momento de torsión?

Consultar con Juan la dirección del momento

$$\tau = 200 \cdot (75 \cdot 10^{-3}) \cdot (1.590,43 \cdot 10^{-6}) \cdot (35 \cdot 10^{-3}) \cdot \sin 60^\circ$$

$$\tau = 7,23 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

b) La dirección del momento de torsión $\vec{\tau}$ es la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, que es, a su vez, un vector perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Dicha dirección se determina aplicando la regla de la mano derecha, en cualquiera de sus versiones; en este caso, de acuerdo con la fig. 8.22, el momento de torsión tiende a producir en la bobina, una rotación en sentido de las manecillas del reloj.

c) Si se invierte la corriente, como se muestra en la fig. 8.23, el vector $\vec{A}$ invierte su dirección, con lo cual la dirección del producto $\vec{\tau} = \vec{A} \times \vec{B}$ también se invierte.

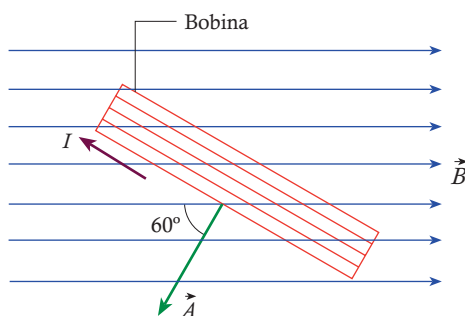


Fig. 8.23 Ejemplo 8.4: cuando la corriente se invierte, el vector $\vec{A}$ cambia de sentido en relación con el caso de la parte (b).

8.7 MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO

Se ha descrito antes cómo una espira ubicada en un campo magnético uniforme y que conduce una corriente eléctrica, experimenta un momento de torsión, el cual tiende a alinear o a poner en paralelo el vector $\vec{A}$ con el vector $\vec{B}$. Cuando se obtiene esta condición de paralelismo, el momento de torsión es cero, como lo indica la ecuación (8.21). Este comportamiento de una espira o, en forma más general, de una bobina, es similar al comportamiento de la aguja de una brújula, si se sitúa en el mismo campo; es decir, el polo norte de la aguja se orienta hacia el polo sur del imán. Esta similitud condujo a considerar que una de las caras de la espira o, una de las caras de la bobina, se comporta como un polo

norte y la otra cara, como un polo sur. Así, se puede concluir que, tanto la aguja de una brújula, como un imán de barra o una espira o bobina que conduce corriente, son *dipolos magnéticos*; es decir, tienen un polo norte y un polo sur. Esta característica es, a fin de cuentas, la causa que hace que estos objetos tiendan a alinearse con el campo magnético $\vec{B}$. En base a este hecho, se ha encontrado útil definir al producto $N\vec{A}$ de la ecuación (8.23) como un nuevo vector asociado con la bobina, al cual se denomina *momento dipolar magnético*, $\vec{\mu}$, de la bobina de área A , que posee N vueltas y por la que circula una corriente I . Se tiene, entonces:

$$\vec{\mu} = NI\vec{A} \quad (8.27)$$

La unidad del momento dipolar magnético en el SI es amperio por metro cuadrado (A/m^2). La dirección de $\vec{\mu}$ es la misma que la del vector $\vec{A}$.

En base a lo descrito antes, el momento de torsión sobre una bobina, expresado por la relación (8.23), puede escribirse:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (8.28)$$

El resultado expresado por la relación anterior es similar al momento de torsión experimentado por un dipolo eléctrico, situado en un campo eléctrico. Dicho momento de torsión se define como:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (8.29)$$

donde $\vec{p}$ es el momento dipolar eléctrico de un dipolo constituido por las cargas $-q$ y $+q$.

Ejemplo 8.5

Una bobina circular tiene un radio de 7 cm y contiene 75 vueltas de conductor, por el cual fluye una corriente de 12 A. Si el vector área $\vec{A}$ de la bobina forma un ángulo de 60° con un campo magnético uniforme de 0,175 T, calcula: a) La magnitud del momento dipolar magnético de la bobina. b) La magnitud del momento de torsión sobre la bobina.

OJO: consultar con Juan.

No se dice cuál es la dirección.

No se dice cuál es la dirección.

Agregar dirección de τ .

Solución

a) La magnitud del momento dipolar magnético se calcula a partir de la relación (8.27), $\mu = NIA$. El área de la bobina es:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^2 = 153,86 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Entonces:

$$\mu = NIA = 75 \cdot 12 \cdot 153,86 \cdot 10^{-4} = 13,85 \text{ Am}^2$$

b) La magnitud del momento de torsión se obtiene a partir de la relación (8.28):

$$\tau = \mu B \sin \theta = 13,85 \cdot 0,175 \cdot \sin 60^\circ = 2,09 \text{ Nm}$$

8.8 PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Imaginemos una partícula cargada positivamente, que entra con cierta velocidad $\vec{v}$ en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme, como como se muestra en la fig. 8.24. Como sabemos, dicha partícula estará sometida a una fuerza magnética que es perpendicular tanto a la velocidad $\vec{v}$ como al campo magnético $\vec{B}$, según los establece la relación $\vec{F}_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Ahora bien, dado que el campo magnético es constante, la fuerza magnética será también constante y puesto que la partícula se

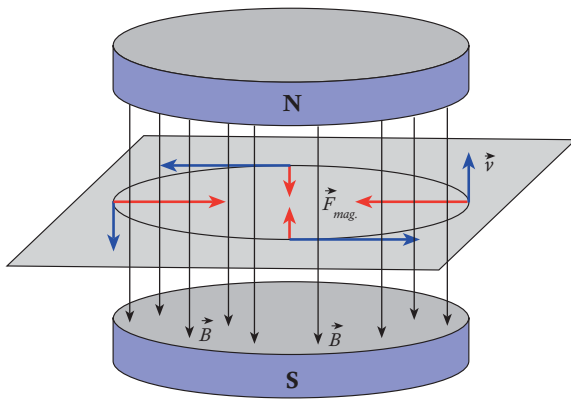


Fig. 8.24 Una partícula positiva que se mueve en un campo magnético uniforme es obligada a describir una trayectoria circular por la acción de la fuerza magnética, producto de la interacción del campo con la partícula cargada.

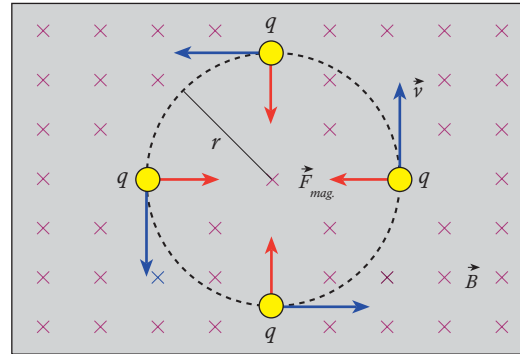


Fig. 8.25 Vista desde la parte superior de la fig. 8.24. Una partícula de carga positiva q se mueve a una velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo magnético. Dicho campo entra perpendicularmente al papel y la fuerza sobre la partícula está dirigida radialmente.

mueve perpendicularmente al campo, su magnitud será $F_{mag.} = qvB \sin 90^\circ = qvB$ y la misma actúa en el mismo plano de la velocidad $\vec{v}$, con lo cual hace que la partícula no pueda salirse de este plano. Como la dirección de $\vec{F}_{mag.}$ es siempre hacia el centro del círculo, el resultado de su acción sobre la partícula, es hacer que ésta se mueva describiendo una circunferencia de radio r con rapidez constante, ya que $\vec{F}_{mag.}$ modifica sólo la dirección de $\vec{v}$ y no su magnitud.

Si se observa la fig. 8.24 desde su parte superior, obtenemos la fig. 8.25, donde el campo magnético está representado por las cruces que penetran en el plano del papel. Como puede verse, la fuerza es perpendicular tanto a la velocidad como al campo. La dirección de rotación de una partícula con carga positiva es contraria a la de las manecillas del reloj; en consecuencia, si la partícula tiene carga negativa, su dirección de rotación será la misma de las manecillas del reloj.

Por la acción de $\vec{F}_{mag.}$, la partícula estará sometida a una aceleración centrípeta, cuyo módulo viene dada por la relación $a_c = v^2/r$ y que apunta en la misma dirección de $\vec{F}_{mag.}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, se tiene:

$$F_{mag.} = ma_c \Rightarrow F_{mag.} = m \frac{v^2}{r} \quad (8.30)$$

Como $F_{mag.} = qvB \sin 90^\circ = qvB$, se tiene:

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (8.31)$$

Despejando r de la relación anterior, se obtiene una expresión para el radio de la circunferencia:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (8.32)$$

Como puede verse de esta última relación, el radio r de la trayectoria de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme, es proporcional a la cantidad de movimiento mv de la partícula e inversamente proporcional tanto a la magnitud de la carga q de la partícula, como a la magnitud del campo magnético $\vec{B}$. Entonces, para diferentes velocidades, la trayectoria de una partícula tendrá diferentes radios de curvatura.

De acuerdo a lo estudiado en cinemática, la velocidad angular de la partícula se expresa como $\omega = v/r$ y de la ecuación (8.32):

$$\frac{v}{r} = \frac{q}{m} B \Rightarrow \omega = \frac{q}{m} B \quad (8.33)$$

Por otra parte, el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa, es decir, el período del movimiento, es igual a:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (8.34)$$

Como $\omega = v/r$, la relación anterior puede escribirse como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.35)$$

Sustituyendo el valor de ω :

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (8.36)$$

De las ecuaciones anteriores, se desprende que tanto la velocidad angular, como el período del movimiento circular de la partícula, no dependen de su velocidad lineal ni del radio de su trayectoria circular, de tal manera que partículas rápidas se

moverán en trayectorias circulares mayores, como se dijo antes, y partículas lentas se moverán en trayectorias circulares menores. En cualquier caso, siempre que la magnitud del campo se mantenga constante, el período de cualquier trayectoria circular será siempre igual, cualquiera sea el su radio.

La frecuencia f es característica de las partículas cargadas que se mueven en un campo magnético uniforme. Normalmente, esta frecuencia recibe el nombre de *frecuencia ciclotrónica* porque en el ciclotrón, máquina aceleradora de partículas subatómicas, la cual se describirá en el capítulo siguiente, éstas se desplazan con esta frecuencia.

Si la dirección del vector velocidad no es perpendicular al campo, la partícula se moverá describiendo una hélice como se muestra en la fig. 8.26. Si se proyecta esta hélice sobre el plano yz , perpendicular al campo, se obtiene una circunferencia de radio:

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (8.37)$$

La componente axial de la velocidad en dirección del campo es:

$$v_{ax} = v \cos \theta \quad (8.38)$$

donde θ es el ángulo entre las velocidad $\vec{v}$ y el campo $\vec{B}$. Esta componente de la velocidad es la que hace avanzar la partícula en la dirección del campo, es decir en la dirección del eje X , haciendo que la trayectoria sea una hélice.

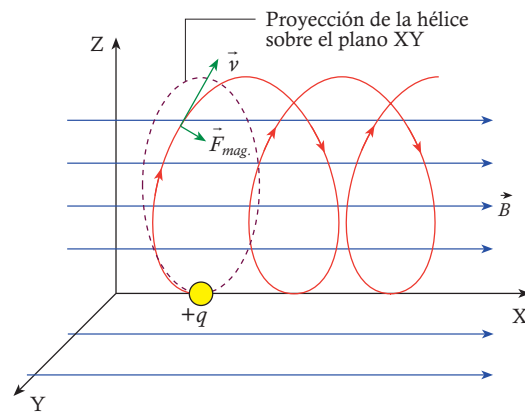


Fig. 8.26 Trayectoria en hélice de una partícula positiva que se mueve en un campo magnético uniforme. El vector $\vec{v}$ forma un ángulo distinto a 90° con el vector $\vec{B}$.

Ejemplo 8.6

Un protón se mueve en una órbita circular de 45 cm radio, perpendicular a un campo magnético uniforme de magnitud 0,40 T. Calcula: **a)** La magnitud de la velocidad lineal del protón. **b)** El período de su movimiento. **c)** La magnitud de la fuerza centrípeta que actúa sobre el protón. **d)** La energía cinética del protón.

Solución

La masa y carga del protón son, respectivamente:

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

a) A partir de la ecuación (8.32) se obtiene la velocidad lineal del protón:

$$v = \frac{rqB}{m_p} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (0,40) \cdot (45 \cdot 10^{-2})}{1,67 \cdot 10^{-27}} = 17,24 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b) De la ecuación (8.36), se calcula el período del movimiento:

$$T = \frac{2\pi m_p}{qB} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27})}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,40} = 16,38 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

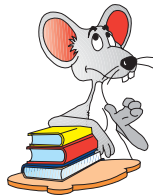
c) La magnitud de la fuerza centrípeta que actúa sobre el protón, se calcula mediante la Ec.(1.23)

$$F_c = m_p \frac{v^2}{r} = 1,67 \cdot 10^{-27} \frac{(17,24 \cdot 10^6)^2}{45 \cdot 10^{-2}} = 1,10 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

d) La energía cinética del protón se obtiene, a partir de la relación que expresa la energía cinética de una partícula:

$$E_c = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} (17,24 \cdot 10^6)^2$$

$$E_c = 0,248 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

**PIENSA Y EXPLICA**

- 8.1** ¿En base a qué, una persona común y corriente, puede decir que un trozo de hierro es un imán?
- 8.2** ¿Es la magnetita un imán natural? Explica.
- 8.3** Se sabe que los chinos inventaron la brújula en el siglo XIII a.c. Explica brevemente cómo lo lograron.
- 8.4** Un imán, cualquiera que sea su forma, tiene dos polos magnéticos, denominados polo norte y polo sur. Explica cómo podrías identificar cuál es el polo norte y cuál el polo sur.

- 8.5** El comportamiento de los campos magnéticos es similar al comportamiento de partículas eléctricas, como el electrón. ¿En qué consiste esa similitud?
- 8.6** Las leyes que rigen las interacciones entre cargas eléctricas y campos magnéticos son semejantes, ¿cuál es la diferencia esencial entre las cargas eléctricas y los polos magnéticos?
- 8.7** La Tierra es un inmenso imán natural. ¿Por qué la brújula se alinea automáticamente con el polo norte geográfico de la Tierra?

- 8.8** ¿Quién fue el primero que estableció científicamente que la Tierra era un imán natural?
- 8.9** Explica cuál fue el gran logro del sabio James C. Maxwell sobre la electricidad y el magnetismo.
- 8.10** Piensa sobre la teoría de la *acción a distancia*, para explicar cómo se transmiten las interacciones entre los objetos, bien sean cuerpos gravitatorios, partículas eléctricas o imanes. ¿Cuál sería tu conclusión sobre esta teoría?
- 8.11** En contraposición a la teoría sobre la acción a distancia, surgió el concepto de campo. De acuerdo a lo explicado en el texto, piensa sobre este concepto y describe por qué es razonable que el campo sea un tipo especial de materia.
- 8.12** ¿Por qué el campo magnético todavía no puede ser explicado cualitativamente, al igual que el concepto general de campo?
- 8.13** C. Oersted descubrió que entre un campo magnético y partículas cargadas en movimiento existe una ligazón. Explica en qué consiste la misma.
- 8.14** Después del descubrimiento de C. Oersted, Faraday llevó a cabo otros descubrimientos relacionados con la ligazón entre el campo magnético y partículas eléctricas en movimiento. Menciona estos descubrimientos.
- 8.15** La naturaleza del campo magnético se explica como el producto del movimiento de los electrones dentro del átomo. Explica cómo ocurre esto.
- 8.16** En base a la explicación anterior, ¿Por qué la mayoría de los cuerpos en la naturaleza no manifiestan propiedades magnéticas? Si una partícula cargada se encuentra en reposo, en un campo magnético uniforme, ¿se podría calcular la fuerza magnética ejercida sobre esta partícula?
- 8.17** Si en una región del espacio existe un campo magnético, ¿cómo podría plantearse el cálculo de la magnitud de ese campo?
- 8.18** Si se le imprime a un protón, una determinada velocidad, y el mismo se desplaza en línea recta, ¿se podría afirmar que en el espacio por donde se desplaza, está libre de cualquier campo magnético?
- 8.19** Una partícula cargada, que se mueve en un campo magnético uniforme, está sometida a una fuerza magnética dada por $F_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Explica, si es posible que esta fuerza pueda ser cero.
- 8.20** Observa que en la ecuación $F_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B}$ aparecen tres vectores. ¿Cuáles de estos vectores son perpendiculares entre sí? ¿Cuáles pueden formar un ángulo diferente de cero?
- 8.21** ¿Puede un campo magnético uniforme, modificar la rapidez de una partícula cargada? Explica.
- 8.22** Explica por qué la fuerza magnética, ejercida por un campo magnético sobre una partícula cargada, no realiza ningún trabajo sobre dicha partícula

8.23 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son correctas? : una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme, no sufre la acción de la fuerza magnética sino cuando: **a)** Se mueve perpendicular a $\vec{B}$, **b)** Se mueve con alta velocidad, **c)** Se mueve a muy baja velocidad y **d)** Se mueve paralela a $\vec{B}$.

8.24 En un campo magnético $\vec{B}$, existente en una cierta región del espacio, penetra un electrón, que se desplaza en línea recta con una cierta velocidad inicial $\vec{v}_0$ y con un ángulo θ , respecto a $\vec{B}$. Después de algún tiempo, el electrón sale del campo con una velocidad $\vec{v}$. Suponga que la fuerza magnética $\vec{F}_{mag.}$ ha sido la única fuerza en actuar sobre el electrón. Justifica cuáles de las siguientes expresiones son correctas y cuáles son incorrectas: **a)** La acción de $\vec{F}_{mag.}$ fue la causa del cambio de la velocidad $\vec{v}_0$ a la velocidad $\vec{v}$, cuando el electrón salió del campo. **b)** La energía cinética de la partícula no sufrió ningún cambio por la acción de $\vec{F}_{mag.}$. **c)** La $\vec{F}_{mag.}$ se mantuvo en todo instante perpendicular a la velocidad del electrón. **d)** El trabajo realizado por $\vec{F}_{mag.}$ sobre la partícula resultó positivo. **e)** La acción de $\vec{F}_{mag.}$ hizo que la partícula modificara su trayectoria rectilínea.

8.25 Una partícula que se mueve en la dirección del eje X, se acerca a un imán, cuyo polo norte está en la dirección Y. La partícula se desvía por la acción de la fuerza magnética ejercida por el imán, en la dirección del eje -Z. ¿Puedes deducir cuál es el signo de la carga de la partícula?

8.26 Si a un conductor recto que conduce corriente, se le aplica un campo magnético uniforme, y sobre el mismo no actúa ninguna fuerza magnética, se debe cumplir: **a)** El conductor es perpendicular al campo, **b)** Siempre debe actuar una fuerza magnética, **c)** El conductor es paralelo al campo y **d)** No se aplica ninguna de las afirmaciones anteriores.

8.27 ¿Cuándo el par de torsión, sobre una bobina que conduce corriente, en un campo magnético uniforme, es máximo? ¿Cuándo es mínimo?



PROBLEMAS



8.1 Tomando como referencia un sistema de ejes coordenados en tres dimensiones, un protón se mueve según el eje $-X$ con la velocidad de $40 \cdot 10^6$ m/s en un campo magnético $\vec{B}$ de magnitud 0,5 T, dirigido hacia arriba, según el eje Y. Calcula la magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre el protón y determina su dirección.

8.2 Un protón se mueve dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B}$, con una aceleración de $2,5 \cdot 10^{12}$ m/s² en la dirección de $+Z$ cuando su velocidad es $2 \cdot 10^6$ m/s y apunta en la dirección $+Y$. Determina la magnitud y la dirección del campo magnético.

8.3 En un campo magnético uniforme de 1,45 T, se mueve un protón a la velocidad de $4,5 \cdot 10^6$ m/s, experimentando una fuerza magnética de magnitud $7,5 \cdot 10^{-12}$ N. Calcula el ángulo que forma la dirección de la velocidad $\vec{v}$ con la dirección del campo magnético $\vec{B}$.

8.4 Un conductor de longitud 2,5 m, forma un ángulo de 54° al norte en relación con un campo magnético de magnitud 1.6 T, dirigido hacia el este. Calcula la magnitud de la corriente que circula por el conductor para que el mismo esté sometido a la acción de una fuerza magnética de magnitud de 3,5 N, dirigida perpendicularmente hacia dentro de la página.

8.5 En un cinescopio o cañón electrónico de televisión, un electrón se mueve hacia la pantalla con una velocidad de $6,75 \cdot 10^6$ m/s en la dirección del eje $+Z$, como se muestra en la fig. 8.27. Un campo magnético uniforme de magnitud 0,04 T está presente en el recorrido del electrón. Si sobre el electrón se ejerce la máxima fuerza magnética posible, calcula: **a)** El valor del ángulo entre la velocidad $\vec{v}$ del electrón y el campo magnético $\vec{B}$. **b)** La magnitud de la fuerza y su dirección. **c)** Si la máxima fuerza aplicada se reduce en un 35%, calcula el nuevo ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético. **d)** Determina la dirección de dicho campo magnético. **e)** Calcula la energía cinética del electrón al entrar al campo magnético. **f)** Calcula la energía cinética del electrón al salir del campo magnético.

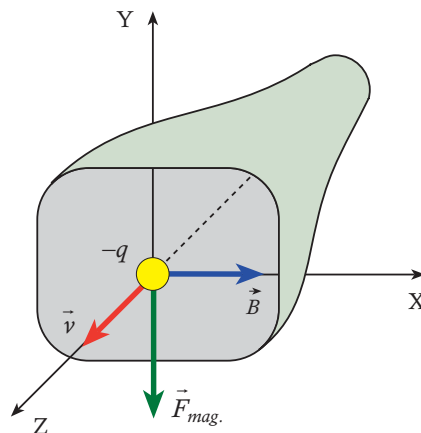


Fig. 8.27 Problema 8.5.

8.6 Por un conductor de 3 m de longitud circula una corriente de 8 A y el mismo se encuentra dentro de un campo magnético uniforme de magnitud 0,45 T. Calcula la magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}_{mag.}$ ejercida sobre el conductor, cuando el ángulo entre éste y el campo es: a) 75°. b) 90°. c) 135°.

8.7 Una espira circular, con una longitud de 2 m y que conduce una corriente de 15 mA, está inmersa en un campo magnético de 0,50 T, paralelo al plano de ésta. Calcula: a) El momento dipolar magnético sobre la espira. b) El momento de torsión, ejercido por la fuerza magnética sobre la espira.

8.8 En un campo magnético de 1.45 T, dirigido 60° al norte del este, como se muestra en la fig. 8.28, está situada una espira circular de 8 cm de radio, por la cual circula una corriente de 2,75 A. El plano de la espira es paralelo a la dirección del campo. Calcula: a) La magnitud del momento dipolar magnético de la espira b) La magnitud del momento de torsión sobre la espira.

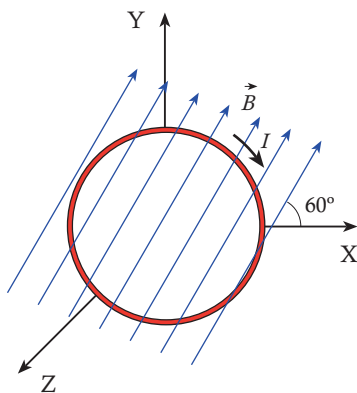


Fig. 8.28 Problema 8.8.

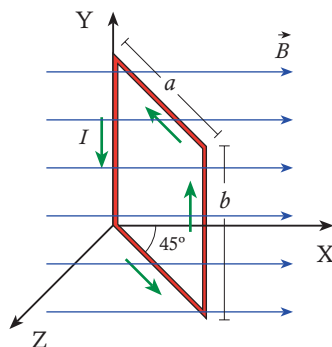


Fig. 8.29 Problema 8.9.

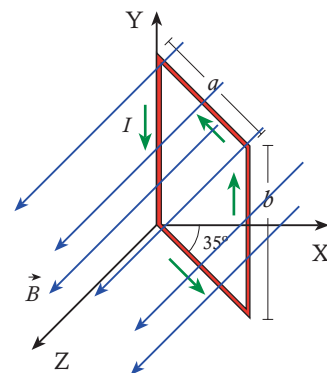


Fig. 8.30 Problema 8.10.

8.9 Una bobina rectangular con 50 vueltas de conductor, con sus lados $a = 0,45$ m y $b = 0,75$ m, como se muestra en la fig. 8.29, puede girar alrededor del eje + Y. La bobina está inmersa en un campo magnético uniforme paralelo al eje + X de magnitud 1,2 T. Cuando el plano de la bobina forma un ángulo de 45° con el eje + X y la misma transporta una corriente de 15 A, en la dirección mostrada en la figura, calcula: a) La fuerza ejercida por el campo sobre cada lado de la bobina. b) El momento de torsión necesario para mantener la bobina en la posición mostrada en la figura. c) ¿Cuál será la dirección de rotación de la bobina? d) Si un eje, paralelo al eje Y, pasa por el centro de la bobina y la misma puede girar sobre éste, ¿cuál será el módulo del par de torsión ejercido sobre la bobina?

8.10 En el problema anterior, si el campo está dirigido paralelo al eje + Z y la bobina forma un ángulo de 35° con el eje + X, como se muestra en la fig. 8.30, hacer los cálculos como en los puntos a y b anteriores.

8.11 Un electrón se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme, de magnitud $0,015\text{ T}$, describiendo una trayectoria circular de radio $3,5\text{ cm}$. Calcula: **a)** La velocidad lineal del electrón dentro del campo. **b)** La velocidad angular del movimiento del electrón. **c)** El período o tiempo que tarda el electrón en dar una vuelta completa. **d)** La frecuencia con que describe la trayectoria circular.

8.12 Un electrón que se mueve con velocidad de $5,4 \cdot 10^6\text{ m/s}$ describe una órbita circular, en un campo magnético uniforme de módulo $0,15\text{ T}$. La dirección del campo es perpendicular a la dirección de la velocidad. Calcula: **a)** El radio de la órbita desarrollada por el electrón. **b)** El número de vueltas que da el electrón en $0,002\text{ s}$.

8.13 Un protón, un electrón, un deuterón y una partícula alfa, penetran a la misma

velocidad y , en forma perpendicular, en un campo magnético uniforme. **a)** Compara las fuerzas magnéticas ejercidas sobre las partículas, **b)** Compara las respectivas aceleraciones. **c)** Compara los radios de las trayectorias circulares y **d)** Dibuja las trayectorias desarrolladas por las partículas dentro del campo magnético.

8.14 Un protón penetra en un campo magnético uniforme de magnitud $0,25\text{ T}$, dirigido según el eje $+X$. La energía cinética del protón es de $2,5\text{ keV}$ y su velocidad forma un ángulo de 75° con el campo, tal como se muestra en la fig. 8.31. Con este ángulo de entrada al campo, tal como se explicó en el texto, cuando se trató sobre la trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético uniforme, la partícula describirá una hélice. Calcula: **a)** El radio de la trayectoria helicoidal. **b)** El avance o paso p de la hélice.

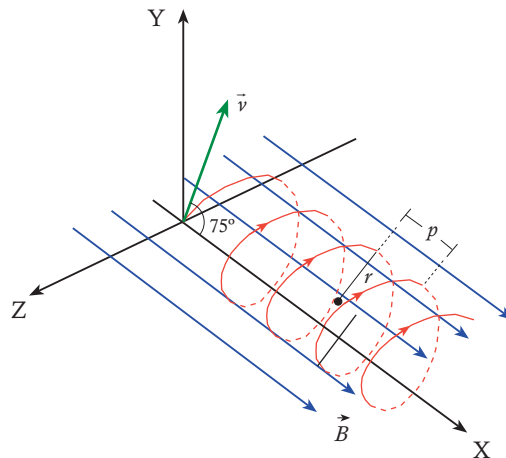
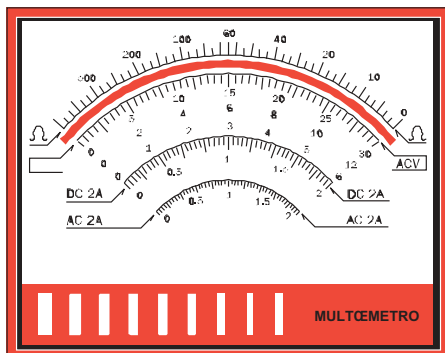


Fig. 8.31 Problema 8.15.



CAPÍTULO 9

INSTRUMENTOS DE MEDIDAS

9.1 EL GALVANÓMETRO

Un galvanómetro es un dispositivo de precisión, utilizado para detectar y medir corrientes eléctricas pequeñas, del orden de hasta 10^{-10} A. El principio de operación de este tipo de instrumento se fundamenta en el *momento de torsión*, sobre una bobina giratoria que transporta corriente, situada en un campo magnético uniforme.

Casi todos los galvanómetros, se basan en el galvanómetro D'Arsonval, considerado como el prototipo de los galvanómetros construidos hasta la actualidad. La fig. 9.1 muestra las partes esenciales de un galvanómetro de este tipo, el cual consta de un imán permanente tipo de herradura, identificado por los polos N – S, un núcleo de hierro dulce, H, y una bobina D, situada alrededor del núcleo H, constituida por unas 20 vueltas de hilo de cobre aislado, muy delgado, arrollado sobre un carrete rectangular, el cual está suspendido por una delgada cinta C, que sirve como resorte recuperador cuando el carrete sale de su posición de equilibrio, y adicionalmente, se utiliza como conductor para aplicar corriente a la bobina. El otro terminal de la bobina está en serie con un resorte muy flexible, para no influir apreciablemente sobre el movimiento del carrete y sirve también para conectar el otro terminal de la bobina a la fuente de tensión eléctrica. La función del núcleo H es disminuir el espacio libre entre las caras polares N – S, con el fin de que el campo magnético sea radial y, por lo tanto, constante entre las caras polares del imán y el núcleo, de tal manera que el campo pueda incidir por igual sobre cada una de las vueltas de la bobina, haciendo más

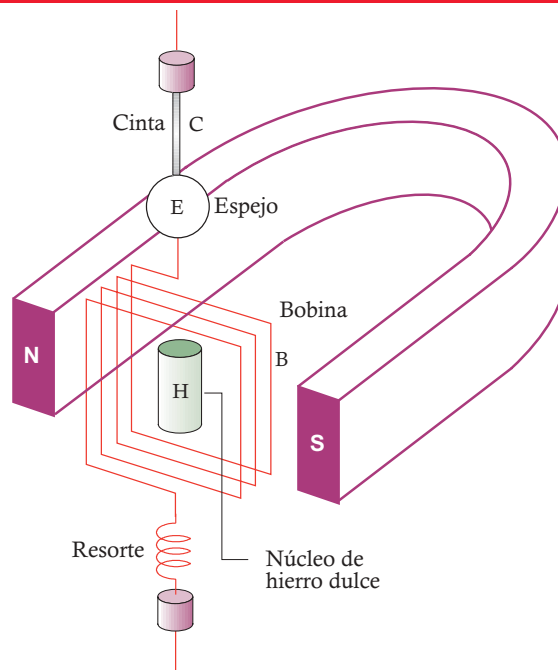


Fig. 9.1 Partes esenciales del galvanómetro D'Arsonval. Cuando circula una corriente en la bobina, la misma experimenta un momento de torsión por la interacción del campo magnético con la corriente. El desplazamiento angular de la bobina es proporcional a la corriente que circula por ella.

sensible el instrumento. Se busca, así, que el movimiento de la bobina sea directamente proporcional a la corriente que fluye por ella, haciendo uniforme a la escala de medida.

Cuando se aplica corriente a la bobina, de acuerdo a lo descrito, se obtiene una fuerza magnética sobre los conductores verticales, el cual produce un momento de torsión alrededor de un eje que pasa por su centro. La bobina en su carrete se mueve según

el sentido de giro del momento y su movimiento continuará hasta que el momento de torsión restaurador de la cinta C, equilibre el momento de torsión debido a la fuerza magnética aplicada al carrete. Para leer el ángulo de desviación de la bobina, se utiliza un haz de luz, el cual, al incidir sobre un pequeño espejo plano E, unido a la cinta C, se refleja apuntando, como una aguja sin peso, sobre una escala situada a una distancia de un metro, como se muestra en la fig. 9.2. Es importante hacer notar que el ángulo de incidencia del haz de luz es igual al ángulo reflejado, por lo tanto, un giro φ del espejo, produce un ángulo de desviación del haz igual a 2φ .

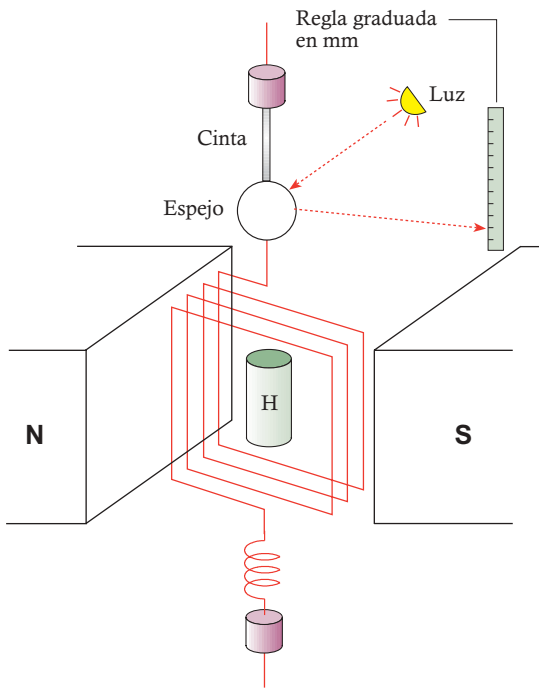


Fig. 9.2 Al circular una corriente por la bobina, se produce un momento de torsión que obliga al espejo a moverse. El ángulo de deflexión es proporcional a la magnitud de la corriente.

9.2 SENSIBILIDAD DE UN GALVANÓMETRO

Es importante conocer el concepto de sensibilidad de un galvanómetro, porque así nos damos cuenta de la capacidad del instrumento para medir la mínima corriente posible. *Se entiende por sensibilidad de un galvanómetro, a la cantidad de corriente que es necesaria aplicar a la bobina para lograr que, al girar la*

misma, el haz reflejado por el espejo se desplace un milímetro sobre una escala alejada un metro del instrumento.

Las sensibilidades más comunes van desde 10^{-8} A hasta 10^{-10} A por cada división de 1 mm de la escala, a un metro del aparato.

Sabemos que la magnitud del momento de torsión sobre el carrete de una bobina, ejercido por la fuerza magnética, es $\tau = NIAB \sin \theta$; como el campo magnético se hace radial con la incorporación del núcleo de hierro dulce, dicho campo es perpendicular al plano de la bobina, por lo cual, $\theta = 90^\circ$. Como $\sin \theta = 1$, la ecuación del momento de torsión toma la forma $\tau = NIAB$. Por otra parte, el momento de torsión recuperador de la cinta de suspensión de la bobina viene dado por:

$$\tau_c = k\varphi \quad (9.1)$$

donde k es la *constante de torsión* de la cinta de suspensión C y φ el ángulo de giro de la bobina. Cuando el momento de torsión τ iguala al momento recuperador τ_c de la cinta C; es decir, cuando $\tau = \tau_c$, la bobina se detiene y se mantiene estable en esa posición.

Ejemplo 9.1

El carrete de la bobina de un galvanómetro como el mostrado en la fig. 9.2, tiene 2,5 cm de altura y 1,5 cm de ancho. La bobina está constituida por 20 vueltas de alambre de cobre aislado y se encuentra en un campo magnético de 0,30 T. Si se suministra un corriente de 10^{-8} A, el haz de luz gira un ángulo de 30° . Calcula la constante k de la cinta C de suspensión.

Solución

Como las dimensiones de la bobina son:

Alto: $2,5 \cdot 10^{-2}$ m

Ancho: $1,5 \cdot 10^{-2}$ m

Su área será:

$$A = (2,5 \cdot 10^{-2})(1,5 \cdot 10^{-2}) = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Cuando el haz de luz gira hasta un ángulo de 30° , el momento de torsión recuperador de la cinta de suspensión equilibra al momento de torsión magnético. Por lo tanto, en ese punto de equilibrio y con $N = 20$, $I = 10^{-8}$ A, $B = 0,30$ T, $\varphi = 30^\circ$ se tiene:

$$\tau = \tau_c \quad \Rightarrow \quad NIAB \sin \theta = k\varphi$$

De donde:

$$k = \frac{NIAB \sin \theta}{\varphi}$$

Sustituyendo valores:

$$k = \frac{20 \cdot (1 \cdot 10^{-8}) (3,75 \cdot 10^{-4}) (0,30) \sin 90^\circ}{30^\circ}$$

$$k = 75 \cdot 10^{-14} \text{ N/grado}$$

Ejemplo 9.2

Un galvanómetro tiene una sensibilidad de $0,0025 \mu\text{A}/\text{div}$ por cada mm o división de la escala. Calcula la corriente que se necesita aplicar a las bobina para que el haz de luz se desvíe 25 divisiones de la escala.

Solución

La sensibilidad del instrumento es:

$$0,0025 \mu\text{A}/\text{div} = 25 \cdot 10^{-10} \text{ A}/\text{div}$$

La corriente requerida es igual al producto de la sensibilidad del aparato por el número de divisiones que gira el haz de luz:

$$I = (25 \cdot 10^{-10} \frac{\text{A}}{\text{div}}) (25 \text{ div}) = 6,25 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

El galvanómetro de D'Arsonval es, sobre todo, un equipo de laboratorio, debido a que es un instrumento delicado, no apto para ser transportado con facilidad fuera de ese ambiente. Típicamente, el galvanómetro se utiliza en circuitos como el puente de Wheatstone, usado para medir resistencias y en el potenciómetro, utilizado para medir fuerzas

electro-motrices desconocidas. Para superar la limitación de este tipo de galvanómetro, se creó el galvanómetro de bobina pivotada, el cual es un equipo robusto, de fácil manejo y transporte y que se puede colocar en cualquier posición.

La fig. 9.3 muestra un galvanómetro de carrete pivotado, el cual es esencialmente igual al galvanómetro de D'Arsonval. El carrete de la bobina puede girar sobre un eje que pasa por su centro. Un resorte helicoidal produce un momento de torsión de restauración de la bobina, en forma similar a lo descrito para el galvanómetro de D'Arsonval. Unida al carrete de la bobina, va la aguja indicadora del instrumento, la cual es un fino tubo de aluminio, aplastado en una extremidad, que señala directamente en la escala la desviación de la bobina. Debido a que la bobina gira sobre cojinetes de ágata o rubíes, existe un pequeño momento de torsión por la fuerza de roce, lo que hace que este galvanómetro sea menos sensible que el de D'Arsonval. Normalmente, la intensidad de corriente que puede medir es no menor de $0,1 \mu\text{A} = 10^{-7} \text{ A}$.

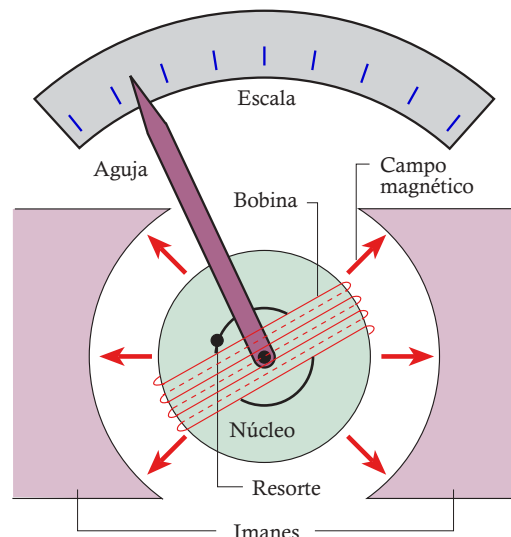


Fig. 9.3 Galvanómetro de carrete pivotado. Con la inclusión del núcleo de hierro dulce, el campo magnético es uniforme en el espacio entre los polos y el carrete, siendo, por tanto, perpendicular a los conductores laterales de la bobina. Como resultado, el desplazamiento angular de la bobina es directamente proporcional a la corriente que fluye por ésta.

9.3 USO DEL GALVANÓMETRO PARA MEDIR LA CORRIENTE DIRECTA

De acuerdo con la tecnología actual, se disponen de dos tipos de medidores de variables eléctricas, los analógicos y los digitales. Los analógicos tienen como base los galvanómetros, como los descritos antes, y los digitales son dispositivos electrónicos que digitalizan y amplifican las lecturas tomadas y las muestran en una pantalla mediante arreglos de diodos emisores de luz o una pantalla de cristal líquido. En este curso se tratarán solo los medidores analógicos.

El galvanómetro descrito antes, de carrete pivotado, puede servir para medir una intensidad de corriente o bien una diferencia de potencial entre sus terminales. Es de notar que el hilo conductor de la bobina obedece a la ley de Ohm, como cualquier circuito eléctrico lineal. Por lo tanto, *la corriente en la bobina es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre sus terminales*. Por otra parte, se debe recordar que el giro de la bobina es proporcional a la corriente que circula por ella; en consecuencia, también este giro será directamente proporcional a la diferencia de potencial entre sus bornes. Los galvanómetros se calibran de tal manera que para una corriente de diseño dada, la aguja se desplace toda la escala. A esta corriente se le conoce como *corriente de escala completa*.

La fig. 9.4 muestra el esquema eléctrico general del galvanómetro, donde la resistencia propia de la bobina se denota como R_g y está en serie con la misma. La bobina se considera ideal; es decir, sin resistencia eléctrica.

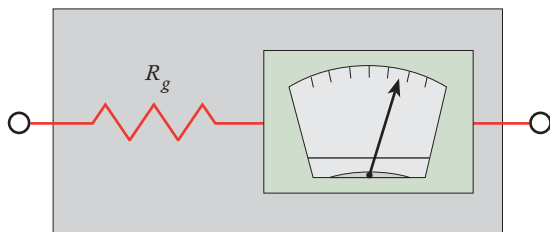


Fig. 9.4 Esquema eléctrico de un galvanómetro. La resistencia R_g es propia de la bobina y se presenta en serie con ésta.

Ejemplo 9.3

La resistencia de la bobina de un galvanómetro es de $30\ \Omega$ y la aguja se desplaza toda la escala cuando la corriente en la bobina es de $1\ \text{mA}$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus bornes?

Solución

Para la corriente de $1\ \text{mA}$ y la resistencia $30\ \Omega$ de la bobina, la diferencia de potencial entre los terminales se calcula como una caída de tensión en una resistencia de un circuito normal. Así se tiene

$$V = RI = 30\ \Omega \cdot 0,001\ \text{A} = 0,03\ \text{V}$$

Este resultado indica que se puede calibrar la escala para medir corrientes, desde cero a $0,001$ amperios, así como medir diferencias de potencial, de cero a $0,03$ voltios. Si por ejemplo, la aguja marca $3/4$ de la escala, entonces la corriente que circula por el galvanómetro será $0,001 \cdot 3/4 = 0,00075\ \text{A}$ y el voltaje entre sus bornes será $0,03 \cdot 3/4 = 0,0225\ \text{V}$.

El galvanómetro no puede ser usado para medir corrientes o diferencias de potencial de valores grandes, porque si se intentara hacer esto, sería necesario construir la bobina con un conductor de calibre muy grueso, para poder manejar corrientes grandes, sin quemarse. Pero al hacer esto, se introducirían resistencias muy grandes en el circuito, lo cual desvirtuaría la precisión en la medida de corrientes y diferencias de potencial en los circuitos eléctricos.

El galvanómetro es el instrumento básico, en el funcionamiento de amperímetros y voltímetros, instrumentos diseñados para la medición de corrientes y diferencias de potencial de cualquier magnitud, como se describe a continuación.

9.4 AMPERÍMETROS

Como su nombre lo indica, el amperímetro es un instrumento utilizado para medir corrientes eléctricas. La fig. 9.5 muestra el símbolo universal del amperímetro, donde se ven dos polaridades específicas, la polaridad positiva, con el signo (+),

de color rojo, la cual lleva el conductor del mismo color, y la negativa, con el signo (-), de color negro, con conductor igualmente del mismo color, todo según el código de colores para conductores eléctricos.

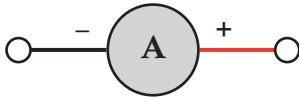


Fig. 9.5 Símbolo del amperímetro. La polaridad positiva se indica en color rojo, mientras que la negativa se indica en color negro.

Ya sabemos que el galvanómetro, como medidor de corriente, sólo puede medir cantidades muy pequeñas, del orden de 1 mA y menores. Si se quiere medir corrientes mayores, se debe transformar el galvanómetro en un *amperímetro*. La transformación se logra, conectando una *resistencia pequeña*, R_p , en derivación o paralelo, con la bobina del galvanómetro, la cual tiene una resistencia interna R_g . Realizado este paso, se dispone entonces de un *medidor de corriente o amperímetro*, el cual, cuando se utilice para medir la corriente que pase por un componente de un circuito, bien sea una resistencia, una bobina, u otro elemento, *se debe conectar siempre en serie* con este componente. Al intercalar el amperímetro, la corriente que se quiere medir, pasa necesariamente por ambos: el amperímetro y el componente, tal como se muestra en la fig. 9.6.

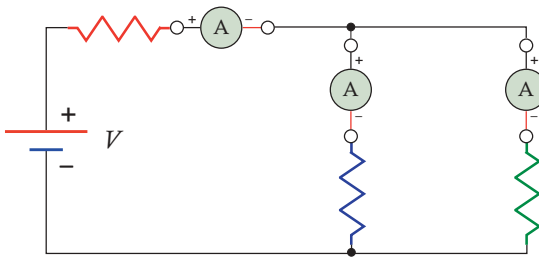


Fig. 9.6 Para medir corrientes, el amperímetro siempre se conecta en serie con el elemento por el cual pasa la corriente.

Observemos la fig. 9.7, donde un galvanómetro es transformado en un amperímetro. Cuando la corriente I entra al amperímetro, la misma se divide en dos partes. Una parte, la corriente I_g , fluye por la bobina. I_g es una fracción muy pequeña de la corriente I , necesaria para que la aguja se desplace toda la escala. La otra parte, la mayor cantidad, I_p , fluye por la resistencia en paralelo.

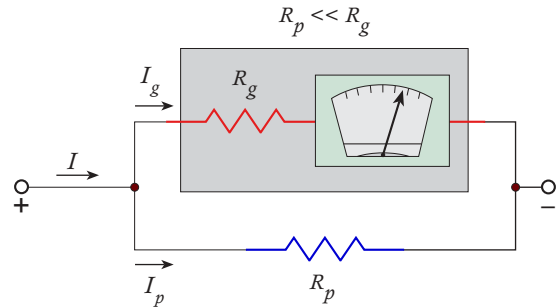


Fig. 9.7 Transformación de un galvanómetro en un amperímetro. La resistencia R_p se conecta en paralelo al galvanómetro y su valor es tal que $R_p \ll R_g$.

Se ha de tomar en cuenta que al conectar la resistencia en paralelo, el valor de la resistencia total del amperímetro alcanza un valor muy pequeño. No obstante, la misma reduce, en cierta cantidad, la corriente que se va a medir. Es necesario hacer que esta resistencia sea lo más baja posible, idealmente cero, para no alterar el valor real de la corriente objeto de medición.

Analizemos el circuito de la fig. 9.7. Como las caídas de voltaje en R_p y R_g son iguales, por estar conectadas en paralelo, se tiene:

$$R_p I_p = R_g I_g \quad (9.2)$$

De (9.2), podemos hallar la relación a fin de calcular, para un amperímetro en particular, la resistencia R_p en paralelo, necesaria en cada rango de la escala. Así se tiene:

$$I_p = \frac{R_g I_g}{R_p} \quad (9.3)$$

Pero, según la ley de Kirchhoff, de las corrientes:

$$I_p = I - I_g \quad (9.4)$$

Sustituyendo (9.4) en (9.3), se tiene:

$$I - I_g = \frac{R_g I_g}{R_p} \Rightarrow R_p = \frac{R_g I_g}{I - I_g} \quad (9.5)$$

Normalmente, los amperímetros son instrumentos que traen varios rangos de escalas. Así, se tienen en el mercado amperímetros cuyos rangos van de 0 a 6

A, 0 a 15 A, 0 a 60 A, 0 a 150 A, 0 a 300 A y 0 a 600 A. Cada rango de escala, por supuesto, está determinado por la resistencia en paralelo, adecuada para la corriente que se quiera medir. Antes de intercalar el amperímetro en el circuito, es necesario saber, de antemano, el rango de la corriente que circulará por dicho circuito, para escoger la escala adecuada. Esto es fácil averiguarlo, revisando la placa de características del equipo eléctrico al cual se le quiere medir la corriente. Por ejemplo, si la placa de características de un equipo indica que opera con 10 A, se seleccionará la escala de 0 a 15 A

Ejemplo 9.4

La bobina de un galvanómetro tiene una resistencia de $60\ \Omega$ y la aguja se desvía toda la escala para una corriente de $0,001\text{ A}$. Calcula la resistencia que es necesario conectar en paralelo, para convertir el galvanómetro en un amperímetro, de tal manera que la aguja se desvíe toda la escala para una corriente de 10 A . La fig. 9.8, muestra el esquema eléctrico del circuito.

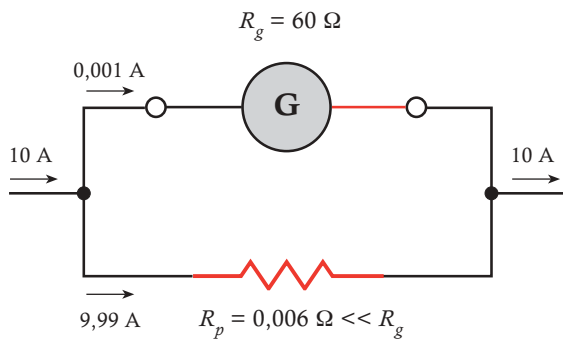


Fig. 9.8 Ejemplo 9.4. La conexión del resistor R_p en paralelo con R_g , transforma al galvanómetro en un amperímetro.

Solución

Con $R_g = 60\ \Omega$ y la corriente a plena escala $I_g = 0,001\text{ A}$, el cálculo de la resistencia R_p se realiza utilizando la relación (9.5). Así se tiene:

$$R_p = \frac{R_g I_g}{I - I_g} = \frac{60 \cdot 0,001}{10 - 0,001} = 0,006\ \Omega$$

La resistencia interna del amperímetro será:

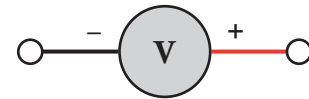
$$R_i = \frac{R_p R_g}{R_p + R_g} = \frac{0,006 \cdot 60}{0,006 + 60} = 0,00599\ \Omega$$

Es importante tener en cuenta que al intercalar un amperímetro en una rama de un circuito, para medir la corriente que fluye por ésta, se debe cuidar que la corriente entre por la *polaridad positiva*; de no ser así, se corre el riesgo de dañar el instrumento.

9.5 VOLTÍMETROS

Los voltímetros son instrumentos utilizados para medir el voltaje entre dos puntos de un circuito. *Tal medición se realiza conectando el voltímetro en paralelo con el componente del circuito, cuyo voltaje se desea determinar.* El símbolo del voltímetro se muestra en la fig. 9.9. En forma similar al amperímetro, la polaridad positiva (+) es de color rojo y la polaridad negativa (−) es de color negro.

Fig. 9.9 Símbolo del voltímetro. La polaridad positiva se indica en color rojo, mientras que la negativa se indica en color negro.



Como se describió antes, el galvanómetro sólo puede medir diferencias de potencial muy pequeñas, del orden de 1 mV o menores. Como en la práctica se requiere medir voltajes mayores a 1 mV , se hace necesario transformar el galvanómetro en un *voltímetro*, para que se puedan hacer estas mediciones. Esto se logra añadiendo una resistencia grande, en serie con la resistencia de la bobina, de tal manera que por el galvanómetro, transformado en voltímetro, circule sólo la corriente necesaria para hacer girar la aguja toda la escala. Esta corriente como se sabe, es la corriente I_g y es muy pequeña, del orden de 1 mA .

Si se conectara el galvanómetro en paralelo con un componente que está a una tensión, por ejemplo, de 100 voltios , sin resistencia en serie adicional, pasaría una corriente mayor de 1 mA por la bobina, la cual se fundiría por calentamiento. Por ello, es necesario añadir una resistencia en serie, a la resistencia interna de la bobina, de magnitud tal que,

al sumarla las dos, no dejen pasar sino 1 mA, corriente justamente necesaria para que la aguja gire toda la escala.

La fig. 9.10 muestra cómo se conecta un voltímetro para medir la diferencia de potencial del componente R_2 .

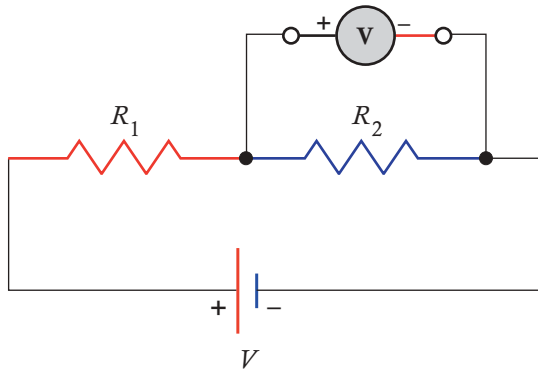


Fig. 9.10 Un voltímetro debe conectarse en paralelo al elemento al cual se le desea medir el voltaje. Así, para medir el voltaje en R_2 , el voltímetro se le conecta en paralelo.

En teoría, la resistencia del voltímetro debiera ser infinita, para que no pase ninguna corriente por él, con lo cual no afectaría la medición del voltaje que se quiere medir. No obstante, es necesario que la corriente I_g circule por la bobina para que la aguja pueda girar toda la escala. La fig. 9.11 muestra el esquema eléctrico de voltímetro, donde se puede ver la resistencia R_s en serie con la resistencia R_g del galvanómetro. La resistencia $R_s + R_g$ sólo debe permitir el paso, como se ha dicho, de la corriente I_g , para que la aguja se desplace toda la escala.

La diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b** de un voltímetro usado para medir el el voltaje en una

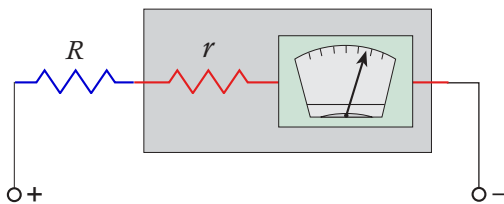


Fig. 9.11 Transformación de un galvanómetro en un voltímetro. La resistencia R_s se conecta en serie al galvanómetro y su valor es tal que $R_s \gg R_g$.

resistencia, como se muestra en la fig. 9.10, da lugar a la siguiente ecuación:

$$V_{ab} = R_g I_g + R_s I_g \quad (9.6)$$

De esta ecuación se obtiene:

$$R_s = \frac{V_{ab}}{I_g} - R_g \quad (9.7)$$

Esta última relación permite calcular la resistencia que es necesaria añadir al galvanómetro para transformarlo en un voltímetro

Ejemplo 9.5

La bobina de un galvanómetro tiene una resistencia interna R_g de 200Ω . Para una corriente I_g de 1 mA, la aguja se desvía toda la escala. Calcula la resistencia R_s que es necesario añadir en serie con R_g para transformar el galvanómetro en un voltímetro capaz de medir 120 voltios a plena escala.

Solución

La suma de las resistencias R_s y R_g sólo debe dejar pasar por el voltímetro una corriente de 1 mA, para una caída de voltaje de 120 voltios. A partir de la relación (9.6) se calcula R_s :

$$R_s = \frac{V_{ab}}{I_g} - R_g = \frac{120}{0,001} - 200 = 119.800 \Omega$$

Como puede verse del resultado, $R_s \gg R_g$.

Al utilizar un voltímetro, se debe tomar en cuenta la polaridad del instrumento, de tal manera que el terminal positivo debe conectarse en el punto de mayor potencial del componente del circuito y el terminal negativo en el punto de menor potencial de dicho componente.

Normalmente, un voltímetro viene conjuntamente con un amperímetro, en una caja común de fácil operación manual. Tal aparato recibe el nombre genérico de *multímetro*. Cada uno de estos instrumentos viene con diversas escalas, para que se

puedan usar para una amplia gama de corrientes y voltajes.

9.6 EL PUENTE DE WHEATSTONE

El puente de Wheatstone es un instrumento utilizado para medir con precisión el valor de una resistencia. El esquema básico de este dispositivo se muestra en la fig. 9.12.

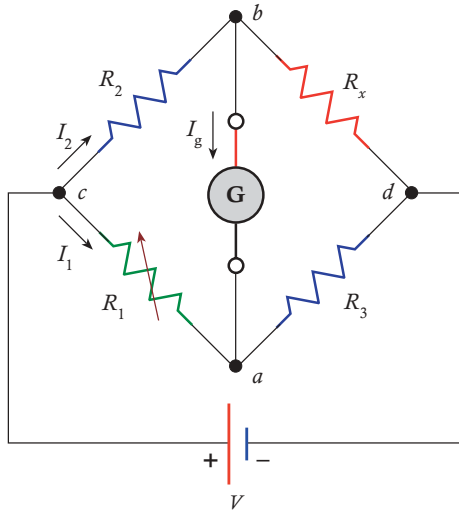


Fig. 9.12 Puente de Wheatstone. Este instrumento se utiliza para medir resistencias desconocidas. El puente está balanceado cuando no existe corriente en el galvanómetro.

La configuración del puente incluye dos resistencias conocidas R_2 y R_3 y una resistencia variable calibrada, R_1 . A un terminal externo se coloca la resistencia R_x , la cual se desea medir. Para efectuar la medición, se varía la resistencia R_1 hasta que la corriente en el galvanómetro sea cero. En este caso, $I_g = 0$ y se dice que el puente está calibrado. Bajo estas condiciones, la diferencia de potencial entre los puntos a y b es nula y $V_a = V_b$. De aquí, se deduce que $V_{ca} = V_{cb}$; es decir, el voltaje en la resistencia R_1 iguala al voltaje en la resistencia R_2 . Similarmente, $V_{R3} = V_{Rx}$ y el voltaje en $R_3 = V_{Rx}$. Entonces tenemos:

$$V_{ca} = V_{cb} \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad (9.8)$$

$$V_{ad} = V_{bd} \Rightarrow R_3 I_1 = R_x I_2 \quad (9.9)$$

El valor de R_x puede obtenerse dividiendo miembro a miembro las dos relaciones anteriores:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (9.10)$$

9.7 EL POTENCIÓMETRO

Este instrumento se utiliza para medir una fuerza electromotriz desconocida. Su esquema eléctrico se muestra en la fig. 9.13. V_x es la fuerza electromotriz que se desea determinar. La resistencia $R = R_1 + R_2$ es una resistencia variable cuyo brazo móvil se desplaza hasta que la lectura en el galvanómetro sea nula. V es una fem conocida. Cuando $I_g = 0$, se tiene la siguiente ecuación, de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff:

$$V_x - R_1 I_R = 0 \quad (9.11)$$

Una vez logrado este balance, la celda de fem desconocida se reemplaza por una celda, cuya fem electromotriz es conocida con precisión (celda estándar). Nuevamente, se mueve el brazo deslizante del potenciómetro hasta que $I_g = 0$. Como en el caso anterior, la corriente $I_R = I$ y si llamamos R_3 a la resistencia entre los puntos a y d y V_e a la fem estándar, se tiene:

$$V_e - R_3 I_R = 0 \quad (9.12)$$

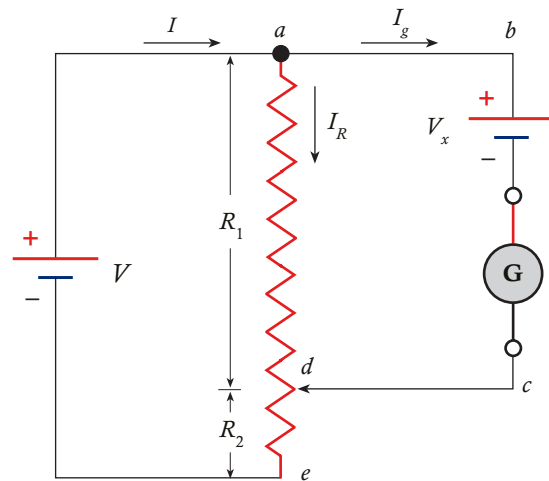


Fig. 9.13 Circuito eléctrico de un potenciómetro. La fem desconocida, V_x se determina en función de la fem conocida, V .

Combinando (9.11) y (9.12):

$$V_x = \frac{R_1}{R_3} V_e \quad (9.13)$$

Es decir, conocidos el valor de la fem estándar y las lecturas de las resistencias R_1 y R_2 , se puede determinar el valor de la fem desconocida V_x .

9.8 EL CICLOTRÓN

El ciclotrón es un aparato creado para acelerar partículas cargadas, principalmente protones, deuterones y partículas alfa. El objeto de la aceleración es imprimirles alta energía para utilizarlas en el bombardeo de núcleos atómicos. De esta manera, se provocan reacciones nucleares que son estudiadas por los investigadores que se dedican al conocimiento de la estructura de la materia.

El ciclotrón fue inventado por los físicos Ernest O. Lawrence y M. Stanley Livingston en 1931. El funcionamiento de este aparato está basado en el movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme y en un campo eléctrico.

La fig. 9.14 muestra las partes principales de un ciclotrón. Estas son las siguientes:

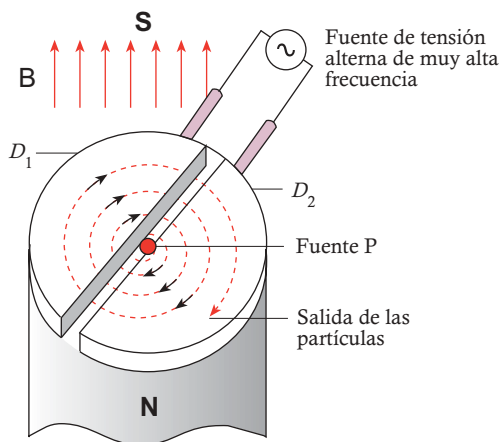


Fig. 9.14 Diagrama esquemático de un ciclotrón. Consta de una fuente de partículas, P, y dos cajas en forma de D, la D_1 y la D_2 , por donde circulan las partículas. Las líneas circulares punteadas representan las trayectorias que siguen las partículas en movimiento.

- Los polos norte y sur de un imán que producen un campo magnético uniforme.
- En medio de los polos del imán se ubica un cilindro o caja, donde se aceleran las partículas. El cilindro está constituido por dos compartimientos que tienen la forma de una D. En la figura se distinguen como D_1 y D_2 y están separadas cierta distancia. Estas “des”, como se les llama, están hechas de hojas de cobre, son huecas y a las mismas va conectada una fuente de voltaje alterno ΔV , que cambia su polaridad, cada vez que una partícula recorre una D.

El tiempo que tarda una partícula en recorrer una D es $T/2$, donde T es el período o tiempo que tarda la partícula en recorrer una circunferencia completa, dentro de las dos “des”. Este tiempo está dado por:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (9.14)$$

La partícula cargada, de masa m , inicia su movimiento aproximadamente en el punto medio del espacio de las “des” con una velocidad pequeña y la misma es acelerada durante el tiempo que la partícula tarda en recorrer el espacio entre dichas “des”, debido al campo eléctrico creado por el voltaje alterno aplicado. El cambio de polaridad de ese voltaje, justamente en el momento que la partícula deja D_1 para pasar a D_2 , con esta última a un potencial menor, asegura que el campo eléctrico creado en el espacio comprendido entre las “des”, apunte siempre en la misma dirección del movimiento de la partícula. Con esto, se logra que sea acelerada y adquiera una energía cinética igual a $q\Delta V$.

Mientras la partícula se desplaza dentro de una D, no puede ser acelerada, ya que este espacio está apantallado o protegido del campo eléctrico por las paredes de cobre; es decir, en esta trayectoria, el campo eléctrico es cero, en cambio, el campo magnético no es apantallado por las paredes de cobre, por lo cual la partícula se moverá desarrollando una trayectoria circular, con rapidez constante.

Cuando la partícula entra a D_2 lo hace con una velocidad y energía mayor, por lo que describirá una semicircunferencia con un radio mayor. El radio de esta semicircunferencia se expresa a través de

la siguiente relación:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (9.15)$$

Como se puede ver, al variar la velocidad v sólo cambia el radio r , ya que los términos m , q y B permanecen constantes. Se hace la salvedad que m puede variar para velocidades cercanas a la velocidad de la luz, en términos de la teoría de la relatividad.

En el momento que la partícula deja la D_2 , cambia la polaridad, quedando ésta a un potencial mayor con respecto a D_1 , con lo cual la partícula es de nuevo acelerada aumentando su velocidad y ganando una energía cinética igual a $q\Delta V$. La partícula entra a D_1 con un radio mayor. Como resultado, la partícula se desplaza, describiendo una curva en forma de espiral creciente y, cada vez que cruza una distancia entre las “des”, la velocidad se incrementa y gana por lo tanto una energía cinética igual a $q\Delta V$.

Cuando el crecimiento del radio de la trayectoria en espiral de la partícula, llega casi a rozar la pared interna más alejada de la D que recorre en ese momento, la partícula sale disparada por la abertura de salida, la cual está constituida por una placa deflectora con carga eléctrica negativa.

Es de advertir que el período T , del movimiento circular de las partículas en el ciclotrón, no depende de la rapidez con que se mueven dichas partículas, de tal manera que las mismas, a medida que aumentan su rapidez por la acción del campo eléctrico, se van desplazando en órbitas cada vez mayores, en un movimiento en espiral, como se dijo antes, pero empleando el mismo tiempo en recorrer cada media circunferencia de la D respectiva.

Hay que tener en cuenta que el campo eléctrico en el espacio entre las “des” puede entorpecer la aceleración de la partícula, si la frecuencia de la tensión aplicada no coincide con la frecuencia de giro de la partícula a través del espacio entre las “des”. Por lo tanto, para que el ciclotrón funcione correctamente, se debe cumplir que la frecuencia f de giro de la partícula, sea exactamente igual a la frecuencia de la tensión aplicada. La *frecuencia ciclotrónica* de giro de la partícula es:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (9.16)$$

La frecuencia dada por (9.16) debe ser igual a la frecuencia de la tensión aplicada.

Se puede obtener una expresión para la energía cinética, cuando la partícula abandona el ciclotrón, teniendo en cuenta que para ese momento, el radio r es máximo e igual al radio de las “des”. De la relación (9.15), al despejar v se tiene:

$$v = Br_{\text{máx}} \frac{q}{m} \quad (9.17)$$

Si esta ecuación se sustituye en la expresión de la energía cinética, se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 r_{\text{máx}}^2}{2m} \quad (9.18)$$

Ejemplo 9.6

Un ciclotrón tienen un radio de 0,50 m, y está dentro de un campo magnético de 0,015 T. Una diferencia de potencial de 1.000 voltios es aplicada a las “des”, para acelerar un protón, el cual parte del reposo cerca del punto medio del espacio entre las “des”. Desde este punto, el protón es acelerado por el campo eléctrico, hasta penetrar en la D_1 , donde sólo actúa el campo magnético, el cual, a través de la fuerza magnética ejercida por dicho campo, hace que el protón describa una trayectoria circular. Calcula: **a)** El radio de la trayectoria circular correspondiente a la semicircunferencia de la primera D_1 . **b)** El tiempo que tarda el protón en recorrer la semicircunferencia. **c)** Las veces que el protón será acelerado antes de salir del ciclotrón. **d)** La energía cinética final expresada en eV. **e)** La frecuencia de la tensión aplicada a las “des” para lograr que los protones aceleren.

Solución

Se tiene la siguiente información:

Radio de las “des”: $r = 0,50$ m

$B = 0,015$ T $\Delta V = 1.000$ V

Masa del protón = $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Carga del protón = $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Sabemos que el protón parte del reposo y es acelerado por la fuerza eléctrica, cada vez que cruza la distancia que separa las “des”. Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, al igual que la fuerza gravitatoria, la energía mecánica total de la partícula se conserva; es decir, cualquier cambio de energía cinética de una partícula en movimiento, es igual a un cambio negativo de su energía potencial. En símbolos:

$$\text{donde:} \quad \Delta E_c = -\Delta E_p$$

$\Delta E = q\Delta V$
y ΔV es la variación de la tensión aplicada. Según el principio de la conservación de la energía:

$$q\Delta V = \frac{1}{2}m_p v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2q_p \Delta V}{m_p}}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 4,37 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Luego que el protón entra en la D_1 , donde actúa el campo magnético, es sometido a la fuerza magnética ejercida por el campo, haciendo que describa una trayectoria circular. De (9.15), se puede calcular el radio r_1 de esta trayectoria:

$$r_1 = \frac{m_p v_1}{q_p B} = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot (4,37 \cdot 10^5)}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,015} = 0,30 \text{ m}$$

b) Como la velocidad dentro de la D_1 es constante, ya que el campo magnético no modifica la energía cinética de la partícula, podemos usar la fórmula siguiente:

$$t = \frac{L}{v_1} = \frac{\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m_p}{q_p B}$$

Con los valores ya calculados:

$$t = \frac{\pi m_p}{q_p B} = \frac{\pi \cdot (1,67 \cdot 10^{-27})}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (0,015)} = 2,18 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Este tiempo es constante e independiente del radio de la trayectoria, tal como se ha explicado antes.

c) Luego que el protón sale de la D_1 , la polaridad de la tensión aplicada cambia de signo, con lo cual es acelerado de nuevo. Aplicando el principio de la conservación de la energía se calcula la velocidad al final de la distancia de separación de las “des”. Se tiene:

$$q_p \Delta V = \frac{1}{2}m_p v_2^2 - \frac{1}{2}m_p v_1^2$$

pero, como:

$$q_p \Delta V = \frac{1}{2}m_p v_1^2$$

Se puede escribir:

$$\text{Sustituyendo valores:} \quad \frac{1}{2}m_p v_2^2 = 2q_p \Delta V \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{4q_p \Delta V}{m_p}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 6,19 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

El protón entra luego en la D_2 , bajo la acción del campo magnético. Aplicando de nuevo (9.15), se calcula el radio r_2 de la trayectoria del protón en D_2 .

$$r_2 = \frac{m_p v_2}{q_p B} = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot (6,19 \cdot 10^5)}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,015} = 0,43 \text{ m}$$

En el instante en que el protón sale de la D_2 , la tensión cambia de polaridad acelerándolo. La nueva velocidad v_3 , ganada al atravesar el campo eléctrico creado por esta tensión, se calcula siguiendo el mismo procedimiento. Así, se tiene:

$$q_p \Delta V = \frac{1}{2}m_p v_3^2 - \frac{1}{2}m_p v_2^2$$

Pero:

Luego:

$$\frac{1}{2}m_p v_2^2 = 2q_p \Delta V$$

$$\frac{1}{2} m_p v_3^2 = 3 q_p \Delta V \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{6 q_p \Delta V}{m_p}}$$

Finalmente, insertando valores:

$$v_2 = \sqrt{\frac{6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 7,58 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

El radio de este desplazamiento circular dentro de la D_1 será:

$$r_3 = \frac{m_p v_3}{q_p B} = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot (7,58 \cdot 10^5)}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,015} = 0,53 \text{ m}$$

El resultado $r_3 = 0,53 \text{ m}$ es mayor que el radio del ciclotrón que es $r = 0,50 \text{ m}$. Por lo tanto, el protón sale de D_1 por la abertura dispuesta para este propósito y el mismo ha sido acelerado 3 veces desde que partió del reposo.

d) La energía cinética se calcula a partir de la relación (9.18):

$$E_c = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,015^2 \cdot 0,50^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 4,31 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Este resultado es más apropiado expresarlo en unidades eV, las unidades utilizadas en cálculos de la energía de partículas atómicas. Como 1 eV es igual a $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ joules}$:

$$\frac{4,31 \cdot 10^{-16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,69 \text{ eV}$$

e) Para calcular la frecuencia necesaria para que los electrones aceleren, usamos la relación (9.16):

$$f = \frac{q_p B}{2\pi m} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,015}{2\pi \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 0,23 \text{ MHz}$$

9.9 EL TUBO DE RAYOS CATÓDICOS

El tubo de rayos catódicos es un aparato diseñado sobre la base del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético y un campo eléctrico. De acuerdo con el estado de la tecnología actual, con el

tubo de rayos catódicos se obtienen claramente representaciones visuales de objetos, utilizando el movimiento de electrones.

El origen del tubo de rayos catódicos se remonta a la época anterior al año 1852, cuando el físico alemán Plücker describió el fenómeno de los rayos catódicos, aún sin saber la clase de electricidad que transportaban estas radiaciones. Finalmente, en 1871, el físico inglés Varley descubrió que los rayos catódicos eran cargas eléctricas negativas, aunque todavía no se habían descubierto los electrones. Desde entonces, el tubo de rayos catódicos ha sido perfeccionado, hasta llevarlo al estado actual, donde es utilizado para las pantallas de los receptores de televisión, los monitores de las computadoras, las pantallas de los osciloscopios y otros aparatos de la ingeniería y de la medicina.

La fig. 9.15 muestra el detalle esquemático de un tubo moderno de rayos catódicos. Puede verse, en primer término, que todos los componentes están encerrados en un tubo de vidrio especial de alta resistencia, con la forma como se muestra en la figura. En dicho tubo se ha hecho el vacío, con el fin de reducir al mínimo la interacción de los electrones en movimiento con otras partículas. Según la figura, dentro del tubo de vidrio se pueden ver los tres componentes fundamentales del tubo de rayos catódicos:

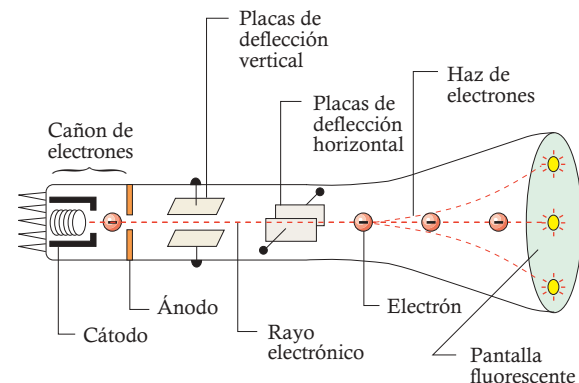


Fig. 9.15 Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos. Un haz de electrones, proveniente del cátodo es acelerado hacia el ánodo por un campo eléctrico horizontal, debido a una diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo. El haz de electrones puede ser desviado en cualquier dirección por las placas de deflexión vertical y horizontal.

- El cañón electrónico, ubicado en la parte de menor diámetro del tubo, está constituido por un *cátodo*, una *rejilla* y el *ánodo*.
- Las placas deflectoras de desviación vertical y de desviación horizontal, mutuamente perpendiculares entre sí.
- Una pantalla revestida interiormente de fósforo, para hacerla fluorescente al impacto de electrones.

En el cañón electrónico, el cátodo sirve como fuente de producción de electrones, los cuales son liberados por un circuito de calentamiento y acelerados, luego, por el campo eléctrico horizontal producido por la aplicación de una diferencia de potencial de varios miles de voltios entre el cátodo y el ánodo. El ánodo además de servir como polo positivo, cumple la función de hacer que el haz estrecho de electrones, provenientes del cátodo, se desplace por ellos en líneas paralelas, hasta chocar con el centro de la pantalla al frente, si en esta trayectoria no existieran placas deflectoras. La pantalla está internamente recubierta de fósforo, por lo cual, al incidir electrones sobre ella, se emite luz visible. Así, cuando un electrón golpea la pantalla, en ese sitio aparece un punto luminoso.

Cuando el tubo de rayos catódicos constituye el elemento fundamental de un *osciloscopio*, el haz de electrones, al dejar los ánodos, se desplaza hacia la pantalla fluorescente, pasando entre los dos grupos de placas deflectoras. Cada una de este grupo de placas está sometida a la acción de campos eléctricos mutuamente perpendiculares. Estos campos eléctricos pueden desviar el haz de electrones, bien hacia arriba, hacia abajo, hacia un lado o hacia otro, con lo cual el haz puede incidir, sobre la pantalla fluorescente, en cualquier punto de la misma. Si la variación de la intensidad de los campos eléctricos se realiza con un movimiento armónico simple, se pueden obtener las conocidas *curvas de Lissajous*.

En el caso de un receptor de televisión, las deflexiones del haz de electrones, tanto horizontales como verticales, se llevan a cabo por medio de campos magnéticos. Los detalles de estos aparatos no están dentro de los objetivos de este texto.

9.8 MEDIDA DE LA RELACIÓN e/m

(CARGA/MASA) DE ELECTRONES

En 1897 el físico inglés J. J. Thomson utilizó un tubo de rayos catódicos para medir la relación entre la carga del electrón con relación a su masa (e/m). Es importante aclarar que para la época no se conocía la existencia del electrón, como partícula individual que porta la mínima carga eléctrica de la naturaleza. Después de calcular la relación e/m , pasaron 12 años, hasta que Millikan determinó la carga del electrón, con lo cual se pudo determinar su masa y con esto se abrió el camino para el estudio de las partículas subatómicas, estudio que desde esa época, sigue dominando, hasta la fecha, las investigaciones de la Física.

El tubo de rayos catódicos utilizado por Thomson se presenta en la fig. 9.16. Las placas paralelas $P-P'$ sirven como bornes, para aplicar una tensión y producir un campo eléctrico $\vec{E}$, dirigido hacia abajo, con el objeto de producir una deflexión hacia arriba, de los electrones provenientes del cátodo. En esta zona, como puede verse en la figura, se aplica un campo magnético perpendicular al campo eléctrico, con el objetivo de producir una fuerza sobre los electrones. Esta fuerza está dirigida hacia abajo, por ser los electrones cargas negativas. Es posible ajustar estos campos para lograr que el rayo de electrones, siga una trayectoria recta, con lo cual se puede obtener la relación e/m .

El proceso del experimento de Thomson fue en esencia el siguiente:

- Se aplica una tensión de varios miles de voltios

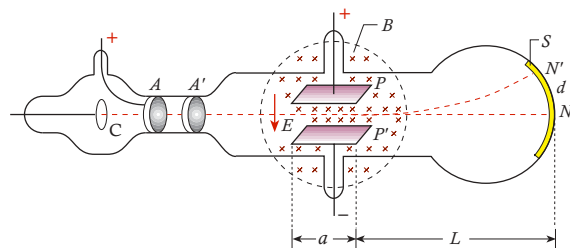


Fig. 9.16 Tubo utilizado por J. J. Thomson para medir la relación q/m . Los electrones son acelerados desde los cátodos y pasan por las rejillas A y A', formando haces rectos y paralelos. Los campos eléctrico y magnético pueden desviar el haz de electrones, el cual incide sobre la pantalla fluorescente, produciendo destellos luminosos.

entre el ánodo A y el cátodo C . Aun cuando existe un alto grado de vacío en el tubo, dentro del mismo permanecen algunos iones positivos que son acelerados hacia el cátodo C , el cual tiene un potencial negativo. Como consecuencia del choque de estos iones con el cátodo, se desprenden electrones de su superficie. Muchas de estas partículas, por ser cargas negativas, son absorbidas por el ánodo, pero un pequeño haz, pasa a través de la rendija hecha en el ánodo y, luego, a través de una rendija en un diafragma metálico A' . Estas dos rendijas tienen como objeto hacer que las partículas se desplacen hacia la pantalla, en línea recta. En estas condiciones, el rayo de electrones impactará en línea recta sobre la pantalla, en el punto N , lo cual se evidencia por una señal luminosa brillante.

b. A continuación, se activa únicamente el campo eléctrico, dirigido hacia abajo. Con esto, la fuerza eléctrica $F = eE$ hace que las partículas inicien una deflexión hacia arriba, durante su paso por las placas $P-P'$ e inciden en la pantalla en el punto N' . La deflexión $NN' = d$ se calcula mediante la ecuación:

$$d = \frac{eELa}{mv^2} \quad (9.19)$$

c. Se desactiva el campo eléctrico y se aplica sólo el campo magnético y, dado que las partículas son cargas negativas, la fuerza sobre éstas estará dirigida hacia abajo, por lo cual dichas partículas deflejarán hacia abajo, describiendo, como se sabe, una trayectoria circular. La magnitud de esta fuerza es $F_{mag.} = evB$.

d. Se aplican simultáneamente el campo eléctrico y el campo magnético. Ajustando los valores de dichos campos, es posible lograr que las fuerzas eléctrica y magnética sean iguales. Por estar dirigidas en sentidos contrarios, las mismas se anulan, con lo cual se logra que los rayos no deflecten, impactando de nuevo en la pantalla en el punto N . Cuando se cumple esta condición:

$$eE = evB \Rightarrow v = \frac{E}{B} \quad (9.20)$$

Sustituyendo (9.20) en (9.19) se tiene:

Despejando e/m :

$$d = \frac{eELa}{m\left(\frac{E}{B}\right)^2} = \frac{eLaB^2}{mE}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{Ed}{LaB^2} \quad (9.21)$$

Todos los valores del segundo miembro de la relación (9.21) pueden ser medidos; por lo tanto, J. Thomson pudo obtener un valor para la relación e/m . El valor actual de la relación e/m , después de varias modificaciones al procedimiento utilizado originalmente por Thomson, es:

$$\frac{e}{m} = 1,7589 \text{ coulomb/kg}$$

Estos resultados, producto de los brillantes experimentos llevados a cabo por el físico J. Thomson, condujeron al descubrimiento del electrón.

Ejemplo 9.7

En un tubo de rayos catódicos, como el que se muestra en la fig. 9.16, un haz de electrones parte del cátodo y penetra en las placas deflectoras, donde existe un campo eléctrico de intensidad $27 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. Simultáneamente, en esta región existe un campo magnético de magnitud de $2,7 \text{ T}$, perpendicular al campo eléctrico y al haz de electrones. a) Calcula la velocidad del haz, si el mismo en su trayectoria recta hacia la pantalla, no sufre ninguna desviación. b) Si se suprime el campo eléctrico, calcula el radio de la trayectoria circular del haz de electrones.

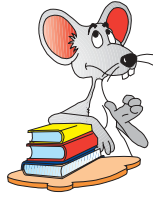
Solución

a) El cálculo de la velocidad se hace aplicando la relación (9.20):

$$v = \frac{E}{B} = \frac{27 \cdot 10^5}{2,7} = 10 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

b) Aplicando la relación (9.15) para el electrón, se calcula el radio del haz de electrones, cuando se suprime el campo eléctrico.

$$\begin{aligned} \text{9.1} \quad & \text{Explicar en que se basa el principio de} \\ r = \frac{m_e v}{eB} &= \frac{(9,1 \cdot 10^{-31})(10 \cdot 10^5)}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 2,7} = 0,21 \cdot 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$



PIENSA Y EXPLICA

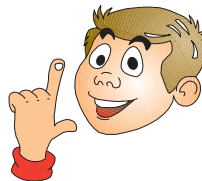


operación del *galvanómetro* y describe qué se entiende por sensibilidad de un instrumento de este tipo.

- 9.2** Si Ud. quiere medir qué corriente consume un aparato de aire acondicionado pequeño, tipo de ventana, de 12.000 BTU, ¿emplearía un galvanómetro para realizar esta medición? En caso negativo, explique las razones para no utilizarlo.
- 9.3** ¿Es el galvanómetro un instrumento utilizado para medir corrientes y diferencias de potencial en cualquier circuito eléctrico? Si la respuesta fuera negativa, para qué se utiliza entonces el galvanómetro?
- 9.4** El galvanómetro, sólo puede medir corrientes y diferencias de potencial muy pequeñas. Si se requiere medir la corriente y tensión a través una plancha de ropa o en un grupo de bombillos en un circuito de iluminación, ¿qué instrumentos utilizaría?
- 9.5** Para medir corrientes en circuitos eléctricos, se utiliza un amperímetro. Describa brevemente en qué se basa el funcionamiento de este instrumento.
- 9.6** Sabemos que el galvanómetro es la base del funcionamiento, tanto de amperímetros como de voltímetros. ¿Qué se hace para transformar un galvanómetro en un voltímetro o en un amperímetro?
- 9.7** Un amperímetro es un aparato que

mide corriente eléctrica en un circuito. Para que el instrumento mida con exactitud la corriente, el mismo debe conectarse al circuito: a) En serie con éste. b) En paralelo. Señale cuál es la respuesta correcta. Explique.

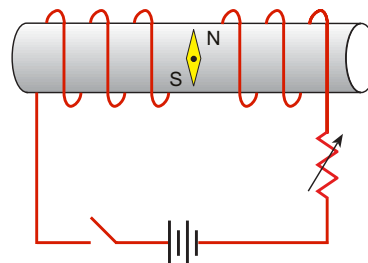
- 9.8** Si se conecta a un circuito un amperímetro en paralelo o un voltímetro en serie, ¿qué cree Ud. que puede ocurrir?
- 9.9** ¿Qué precauciones se deben tener al conectar un amperímetro o un voltímetro en un circuito eléctrico?
- 9.10** El ciclotrón fue construido para acelerar partículas subatómicas, fundamentalmente protones. ¿Podrías explicar brevemente en qué se basa el funcionamiento de este aparato?
- 9.11** Las partículas que se mueven en el ciclotrón adquieren, después de cada media circunferencia de recorrido, un aumento en su rapidez, por la acción del campo eléctrico. Explique por qué todas tardan el mismo tiempo en recorrer cada media revolución.
- 9.12** Cuando un protón se mueve en un ciclotrón, la frecuencia de su movimiento viene expresada por $f = qB/2\pi m$. Si este mismo protón, se mueve en un campo magnético, pero fuera del ciclotrón, ¿tendrá la misma frecuencia?

**PROBLEMAS**

- 9.1** El carrete de la bobina de un galvanómetro tiene 4,5 cm de altura y 8 cm de ancho. La bobina está constituida por 500 vueltas de alambre de cobre aislado y la misma se encuentra en un campo magnético uniforme y radial, de 0,3 T. Si sobre la bobina se ejerce un par de torsión de $2,7 \cdot 10^{-5}$ N m, ¿qué corriente fue necesaria para producir ese par de torsión?
- 9.2** La bobina de un amperímetro tiene un resistencia de 75Ω y está en derivación con una resistencia $0,15 \Omega$. Si por la derivación circulan 0,20 A, ¿qué corriente pasa por la bobina del amperímetro?
- 9.3** Se requiere convertir un galvanómetro en un voltímetro que mida 10 voltios a escala completa. La bobina del galvanómetro tiene una resistencia de 45Ω y cuando por ella pasan $150 \mu\text{A}$, la aguja se desvía la escala completa. Explica cómo se puede lograr esa conversión.
- 9.4** Un galvanómetro tiene una resistencia interna de 50Ω , y su aguja se desvía toda la escala con una corriente de 0,5 mA. Se requiere convertir este instrumento en un voltímetro que tenga tres escalas, mediante las resistencias apropiadas. Calcula estas resistencias para que el voltímetro pueda medir voltajes de 50, 100 y 150 V.
- 9.5** Un ciclotrón de radio 1,20 m y con un campo magnético de 0,50 T, es utilizado para acelerar protones. Calcula: **a)** La frecuencia del ciclotrón. **b)** La velocidad máxima de los protones. **c)** La máxima energía que tienen los protones al salir del ciclotrón.
- 9.6** Un haz de deuterones (un deuterón es el núcleo de un isótopo del hidrógeno, compuesto por un protón y un neutrón) es acelerado en un ciclotrón. En su movimiento circular y, en el instante de salir de las “des”, el haz describe una circunferencia de diámetro 64 cm. El voltaje acelerador tiene una frecuencia de 10^7 Hz. Calcula: **a)** La magnitud del campo magnético. **b)** La velocidad de salida del haz.
- 9.7** En un tubo de rayos catódicos, un haz de electrones es emitido por el cátodo y es acelerado hacia el ánodo por una diferencia de potencial entre el ánodo y el cátodo de 3.5 kV. Si los electrones parten del reposo, calcula: **a)** Su energía cinética. **b)** La velocidad de los electrones al atravesar el ánodo.
- 9.8** En un tubo de rayos catódicos hay un campo magnético uniforme. Cuando un electrón penetra en ese campo, describe una trayectoria circular, de radio de 25 cm. Si el campo de 15 kV/m, la trayectoria se hace rectilínea. ¿Cuál la magnitud del campo magnético.

CAPÍTULO 10

FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO



Es importante recordar aquí, como se describió en el capítulo 8, que Oersted descubrió que los campos magnéticos pueden ser producidos por cargas eléctricas en movimiento. En ese capítulo se estudiaron las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre una partícula cargada puntual, la cual se mueve en un campo magnético uniforme, así como las fuerzas magnéticas ejercidas sobre conductores que transportan una corriente, cuando estos se encuentran bajo la influencia de un campo magnético. El presente capítulo, tiene como objetivo, completar el estudio sobre el campo magnético, visto como el fenómeno natural producido por cargas eléctricas en movimiento, tal como fue descubierto por Oersted en el año de 1820.

10.1 LEY DE BIOT SAVART

El descubrimiento de Oersted sobre la interacción entre corriente eléctrica y campo magnético fue debido a la casualidad, pues cuando trataba de hacer una demostración en su casa, a sus discípulos y algunos amigos, sobre el calentamiento producido por una corriente eléctrica en un hilo conductor, notó, con sorpresa, que la aguja de una brújula que fortuitamente estaba cerca y en posición paralela al circuito, era desviada y se colocaba en posición aproximadamente perpendicular al hilo conductor. Esto ocurría, cada vez que el circuito era cerrado. Cuando el circuito era abierto la aguja de la brújula, volvía a su posición inicial. El comportamiento de la aguja magnética, al circular la corriente por el circuito, significaba, llanamente, que la corriente eléctrica producía un campo magnético a su alrededor. Con este hecho, Oersted había logrado un importantísimo descubrimiento para la Física,

con profundas implicaciones en el mundo de la tecnología, pues al haber descubierto la relación existente entre la electricidad en movimiento y el magnetismo, abrió las puertas, entre otras cosas, al diseño y producción de las máquinas eléctricas, de profundas implicaciones en el desarrollo de la industria mundial.

Después de este hallazgo fundamental, Oersted inició un duro trabajo, que se prolongó por varios meses, tratando de establecer una teoría que explicara este fenómeno. No logró ningún resultado. Al final, publicó lo que había descubierto, sin ninguna base teórica que pudiera interpretar, operacionalmente, la interacción entre la corriente eléctrica y el magnetismo. Tampoco pudo dar una explicación científica sobre la esencia de la relación entre el movimiento de partículas cargadas y el campo magnético. Aún, actualmente, esta relación permanece sin explicación, teniéndose a tal cuestión como uno de los tantos secretos de la naturaleza.

Casi inmediatamente después que Oersted publicara su descubrimiento, el físico francés Jean Baptiste Biot en colaboración con el también francés Félix Savart, médico y físico, iniciaron experimentos con el objeto de determinar la fuerza que una corriente eléctrica, fluyendo en un conductor, ejercía sobre un imán. El resultado de sus experimentos fue la obtención de una ecuación, que permite calcular el campo magnético, en cualquier punto del espacio, creado por una corriente eléctrica que circula en un circuito.

La fig. 10.1 muestra un elemento de longitud del conductor, de dimensiones muy pequeñas,

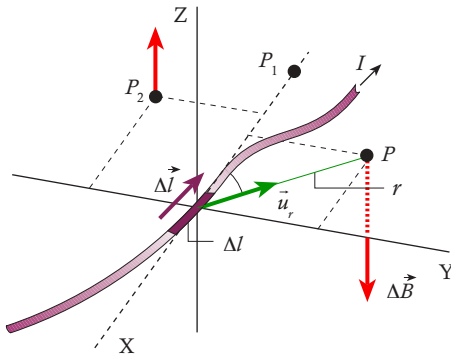


Fig. 10.1 La corriente I que circula por el elemento vectorial $\Delta \vec{l}$ crea en P un campo magnético $\Delta \vec{B}$.

representado, por el vector $\Delta \vec{l}$, por el cual circula una corriente I , que crea un campo magnético muy pequeño $\Delta \vec{B}$ en un punto P del espacio. Si la distancia desde el elemento $\Delta \vec{l}$ al punto P es r y si $\vec{u}_r$ es un vector unitario que apunta desde el elemento $\Delta \vec{l}$ al punto P , el campo magnético $\Delta \vec{B}$, en el punto P considerado, viene expresado por la ecuación:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\Delta \vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (10.1)$$

donde μ_o es una constante de proporcionalidad conocida como *permeabilidad del espacio libre* y tiene un valor dado por:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

Observa que la dirección de $\Delta \vec{l}$ sigue la dirección de la corriente I .

La relación (10.1) se conoce como *ley de Biot-Savart*, y fue también deducida por el físico y matemático francés A. Ampere.

Para la aplicación de la relación (10.1) se requiere el uso del “cálculo infinitesimal”, el cual está fuera de los alcances de los programas de matemática del ciclo diversificado. No obstante, la notación empleada para esta ecuación es, con mucha aproximación, válida, y sirve para los efectos de informar cómo se expresa operacionalmente la ley de Biot-Savart.

Es de advertir que el campo magnético uniforme o estático, como también se le identifica, el cual se ha venido estudiando desde el capítulo 8, no puede ser producido por una carga eléctrica puntual, como el electrón, ya que dicha carga, al acercarse a un punto de referencia en el espacio, irá produciendo un campo creciente, y luego irá disminuyendo dicho campo, a medida que la carga se aleja de dicho punto. Así, un campo magnético uniforme sólo puede ser producido por una corriente estática; es decir, una corriente cuya magnitud no varía con el tiempo.

La dirección del campo magnético $\Delta \vec{B}$ viene determinada por la dirección del producto vectorial $\Delta \vec{l} \times \vec{u}_r$, y será por lo tanto perpendicular al vector $\Delta \vec{l}$ y al vector unitario $\vec{u}_r$. Una regla práctica para determinar la dirección del campo $\Delta \vec{B}$ es aplicar la regla de la manera derecha. Agarrando el vector $\Delta \vec{l}$ con la mano derecha y curvando los dedos hacia el vector unitario $\vec{u}_r$, el dedo pulgar extendido perpendicularmente señalará la dirección del campo $\Delta \vec{B}$. En la fig. 10.1 se describen, según esta regla, las direcciones del campo magnético en los puntos P, P_1 y P_2 .

El módulo del vector $\Delta \vec{B}$, según (10.1), es:

$$\Delta B = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\Delta l \sin \theta}{r^2} \quad (10.2)$$

donde θ es el ángulo que forma el vector $\Delta \vec{l}$ y el vector unitario $\vec{u}_r$.

Es importante destacar que existen similitudes y diferencias entre la ley de Biot-Savart del magnetismo y la ley de Coulomb para el campo eléctrico. Entre las similitudes se pueden mencionar las siguientes:

1. La magnitud del campo magnético en un punto P del espacio, varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el elemento de longitud $\Delta \vec{l}$ y el punto. Igualmente, la magnitud del campo eléctrico varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre una carga puntual Δq y el punto.

2. La magnitud del campo magnético es directamente proporcional a la fuente del campo: la corriente I , y a la magnitud de $\Delta \vec{I}$. En la ley de Coulomb, el campo eléctrico varía, también, proporcionalmente a la fuente Δq .

Las diferencias entre estas leyes son, principalmente, las siguientes:

1. La dirección del campo magnético es perpendicular tanto al vector $\vec{u}_r$ como al vector $\Delta \vec{I}$; en cambio, la dirección de $\Delta \vec{E}$ apunta en la dirección del vector unitario $\vec{u}_r$, que va desde una carga positiva puntual Δq al punto P .
2. Un campo magnético, según la ley de Biot-Savart, se crea a partir de un elemento de corriente que no puede ser aislado, pues tal elemento, necesariamente, tiene que ser parte de una distribución de corriente en un circuito completo, para que pueda fluir una corriente eléctrica. En cambio, una carga eléctrica sí puede ser puntualmente aislada, para crear un campo eléctrico.

10.2 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR CARGAS PUNTUALES EN MOVIMIENTO

Teniendo en cuenta que, por definición, $I = \Delta Q / \Delta t$, y que para el caso de cargas puntuales podemos escribir que $I = q / \Delta t$, la relación (10.1) se transforma en:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q \Delta \vec{I} \times \vec{u}_r}{\Delta t r^2}$$

La velocidad de la carga puntual que crea el campo magnético es:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta t}$$

sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el campo magnético creado por una carga puntual en movimiento:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (10.3)$$

Ejemplo 10.1

Una partícula puntual tiene una carga $q = 15 \cdot 10^{-6}$ C y se encuentra en el punto de coordenadas $x = 2$ m, $y = 3$ m, para $t = 0$. En ese momento, la partícula tiene una velocidad $\vec{v} = 25$ m/s $\vec{i}$. Calcula el campo magnético en $x = 4$ m, $y = 2$ m como muestra la fig. 10.2.

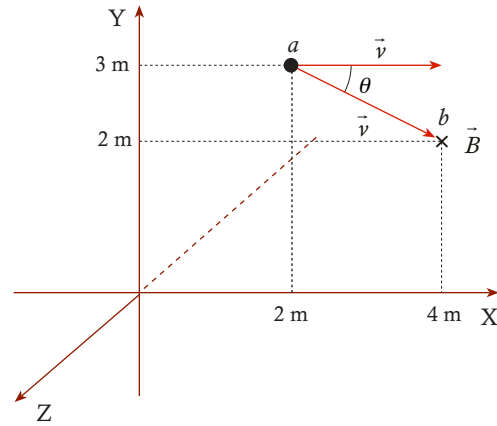


Fig. 10.2 Ejemplo 10.1.

Solución

El campo magnético se calcula utilizando la relación (10.3). Siguiendo el método vectorial, debemos expresar el vector unitario $\vec{u}_r$ en términos de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$. De acuerdo con la fig. 10.2, el vector entre los puntos a y b es $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j}$. El módulo de ese vector es:

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2,23$$

El vector unitario $\vec{u}_r$ se obtiene dividiendo $\vec{r}$ por su módulo:

$$\vec{u}_r = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{2,23} = 0,90\vec{i} - 0,45\vec{j}$$

El producto vectorial $\vec{v} \times \vec{r}$ se obtiene a partir de:

$$\vec{v} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 25 & 0 & 0 \\ 0,90 & -0,45 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la segunda fila:

$$\vec{v} \times \vec{u}_r = -25(0, 45\vec{k}) = -11,25\vec{k}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (10.3) se obtiene el campo $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{(15 \cdot 10^{-6}) \cdot 11,25\vec{k}}{2,23^2}$$

$$\vec{B} = 3,39 \cdot 10^{-12} (-\vec{k}) \text{ T}$$

Como puede verse, el campo tiene la dirección del eje Z negativo.

10.3 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE QUE CIRCULA EN UN CONDUCTOR RECTO

Un conductor recto por el cual fluye una corriente I , crea a su alrededor un campo magnético que es perpendicular al conductor y es constante en cualquier punto que esté a la misma distancia del conductor. La fig. 10.3(a) muestra un conductor recto, con limaduras de hierro a su alrededor, arregladas en círculos concéntricos, por efecto de la acción del campo magnético $\vec{B}$ creado por la corriente. El aspecto circular del espectro de las limaduras de hierro, indica que las líneas del campo alrededor del conductor son también circulares,

siendo la magnitud de dicho campo, directamente proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia perpendicular r , desde un punto cualquiera del espacio, al conductor. La dirección del campo $\vec{B}$ se determina aplicando la regla de la mano derecha: si se toma con la mano derecha el conductor, como se muestra en la fig. 10.3(b), con el dedo pulgar apuntando en la dirección de la corriente, los dedos que se curvan entorno al conductor, indican la dirección circular del campo $\vec{B}$. La dirección del campo magnético es siempre tangente a cualquier línea del campo circular, en cualquier punto de dicha línea, tal como se muestra en la fig. 10.4.

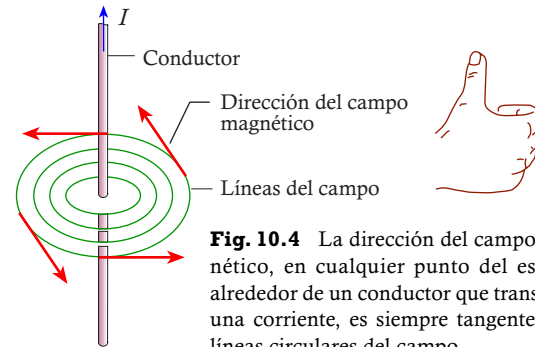


Fig. 10.4 La dirección del campo magnético, en cualquier punto del espacio alrededor de un conductor que transporta una corriente, es siempre tangente a las líneas circulares del campo.

Si el conductor que conduce la corriente es de corta longitud, la fig. 10.5 muestra la geometría para calcular el campo magnético creado por el conductor en un punto P. En forma idéntica a como se describió la ley de Biot-Savart, todo elemento $\Delta \vec{l}$ del

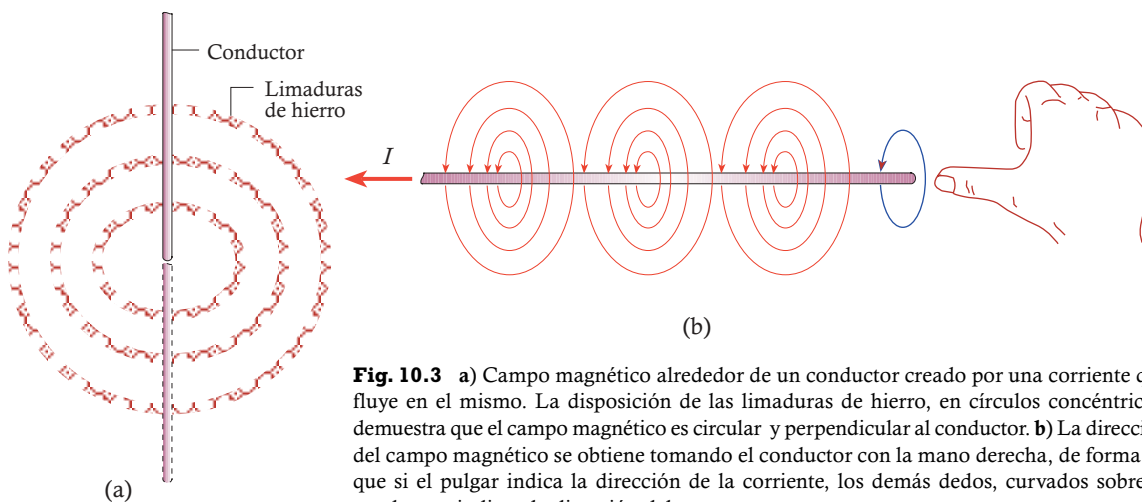


Fig. 10.3 a) Campo magnético alrededor de un conductor creado por una corriente que fluye en el mismo. La disposición de las limaduras de hierro, en círculos concéntricos, demuestra que el campo magnético es circular y perpendicular al conductor. b) La dirección del campo magnético se obtiene tomando el conductor con la mano derecha, de forma tal que si el pulgar indica la dirección de la corriente, los demás dedos, curvados sobre el conductor, indican la dirección del campo.

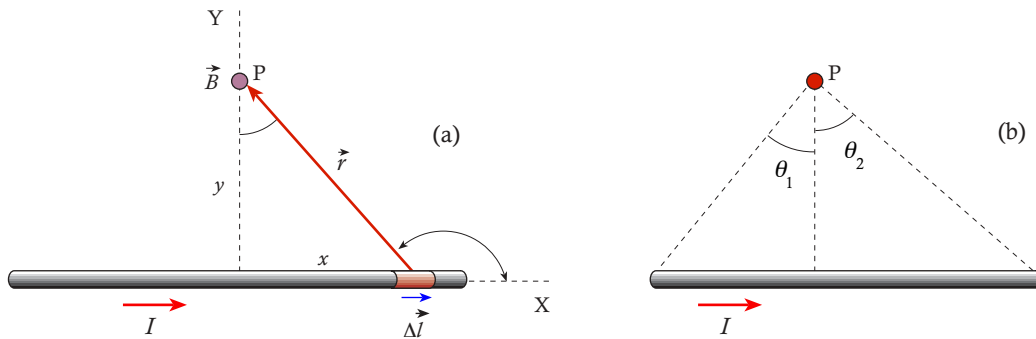


Fig. 10.5 (a) La corriente I que circula por el conductor crea un campo magnético que sale de la página. Cada elemento Δl , contribuye en la creación de la magnitud de dicho campo. (b) El campo magnético en P puede expresarse en función de los ángulos θ_1 y θ_2 . Cuando el conductor es muy largo, $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$.

conductor, por el que circula una corriente I , producirá en el punto P, un campo magnético $\Delta \vec{B}$ cuya dirección, de acuerdo con la regla de la mano derecha, es hacia afuera de la página. El campo magnético total producido por todos los elementos de corriente del conductor en el punto P, será la suma de todos los campos $\Delta \vec{B}$ que apuntan en la misma dirección, hacia afuera de la página. De acuerdo con la figura y mediante el uso del cálculo infinitesimal, el cual, como se ha referido en otro lugar, está fuera del alcance de este curso, se obtiene la magnitud del campo magnético en el punto P:

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (10.4)$$

Si el conductor es muy largo y recto, los ángulos θ_1 y θ_2 son aproximadamente iguales a 90° y la relación (10.4) pasa a ser:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad (10.5)$$

Ejemplo 10.2

Por un conductor largo y recto fluye una corriente de 18 A. Calcular: **a)** La magnitud del campo magnético en un punto situado a 6, 9 y 18 cm del conductor. **b)** Con los datos obtenidos dibuja una gráfica sobre el comportamiento del campo en relación a las distancias al conductor.

a) La magnitud del campo magnético puede calcularse utilizando la relación (10.5):

Para $r = 6$ cm:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 18}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Para $r = 9$ cm, $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T y para $r = 18$ cm, $B = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

b) Si sobre el eje de las Y se llevan los valores de las distancias de los puntos 6, 9 y 18 cm y sobre el eje de las X se toman los valores obtenidos del campo magnético en esos puntos, como se muestra en la fig. 10.6, se obtiene una representación gráfica, donde se puede visualizar cómo varía el campo, con relación a las distancias al conductor.

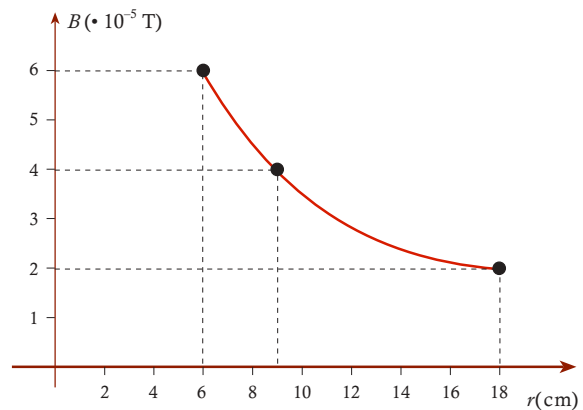


Fig. 10.6 Ejemplo 10.2: la gráfica muestra la variación del campo magnético con la distancia al conductor que transporta la corriente de 18 A.

Solución

10.4 CAMPO MAGNÉTICO CREADO EN EL CENTRO DE UNA ESPIRA CIRCULAR

La fig. 10.7 muestra un conductor curvado en forma de espira, cuyos terminales se conectan a una fuente de voltaje, tal como una batería. Al establecerse una corriente, cada pequeño segmento $\Delta \vec{l}$ del conductor, por el que pasa la corriente I , contribuirá con un campo magnético, también muy pequeño, a la conformación del campo magnético total, que rodea al conductor en toda su extensión.

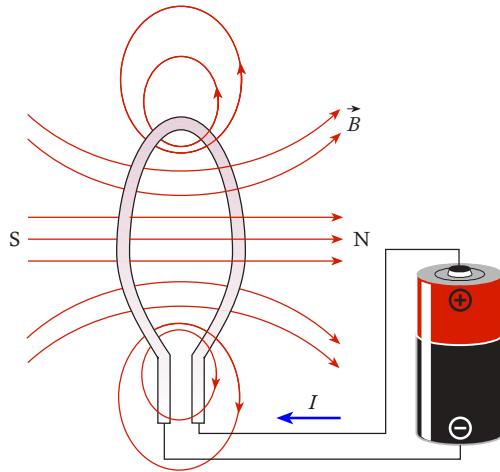


Fig. 10.7 Cada elemento del conductor que conforma la espira crea un pequeño campo magnético, circular y perpendicular al área de la espira. La suma de estas contribuciones conforman el campo magnético de la espira. Por la forma curva del conductor, el campo total se concentra en el centro de la espira.

Debido a la forma circular de la espira, el campo magnético se concentra en el espacio interior de ésta, siendo por lo tanto más fuerte en esta zona que en cualquier otro lugar del espacio que rodea a la espira. La dirección del campo apunta a lo largo del eje de la espira, tal como se muestra en la fig. 10.7. Esta conformación del campo dentro de la espira, constituye un dipolo magnético, con su polo norte y su polo sur. La fig. 10.7 es una gráfica de la espira, en su condición de dipolo magnético.

La dirección del campo de la espira se determina en forma práctica, aplicando la regla de la mano derecha, tal como se ilustra en la fig. 10.8. Si se toma la espira con los cuatro dedos, en la dirección de la corriente, el dedo pulgar extendido perpendicularmente in-

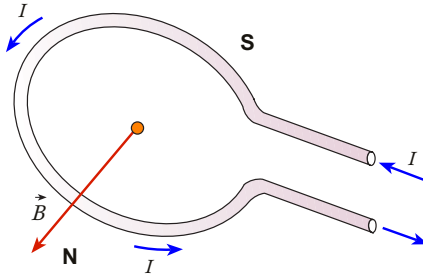


Fig. 10.8 La dirección del campo magnético se determina tomando la espira con la mano derecha. Si los cuatro dedos indican la dirección de la corriente, el pulgar extendido indica la dirección del campo magnético.

dica la dirección del campo magnético.

En sus experimentos sobre el campo magnético, Biot y Savart encontraron que en el centro de una espira de radio R y según el sentido de la corriente, como se muestra en la fig. 10.9, el campo $\Delta \vec{B}$ apunta en la dirección del eje de dicha espira y su magnitud viene dada por la ecuación:

$$B = \frac{\mu_o I}{2R} \quad (10.6)$$

Si en lugar de una espira, se trata de una bobina con N vueltas, la ecuación anterior toma la forma:

$$B = \frac{\mu_o NI}{2R} \quad (10.7)$$

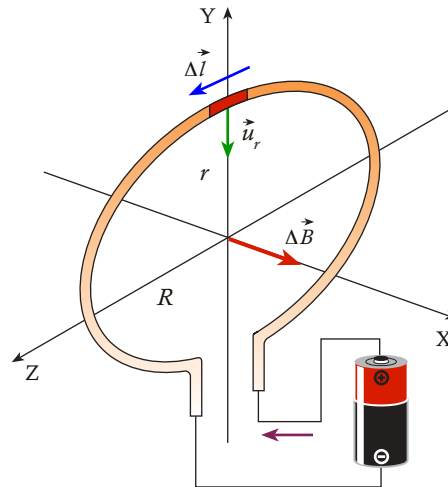


Fig. 10.9 Cada elemento de la espira, por el cual circula la corriente I , produce en el centro un campo magnético $\Delta \vec{B}$.

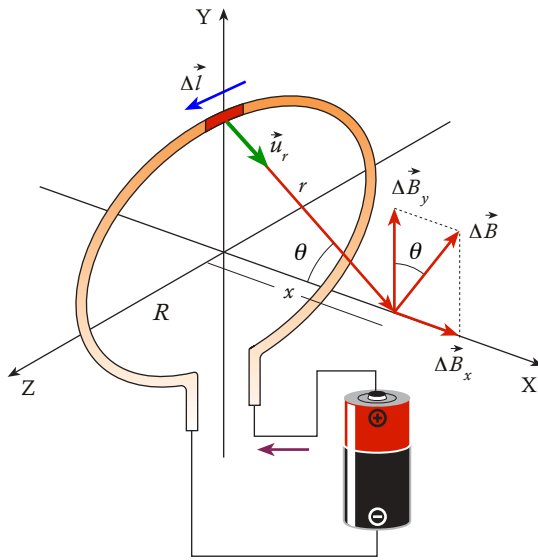


Fig. 10.10 Campo magnético producido por una espira en un punto P sobre el eje de la espira.

10.5 CAMPO MAGNÉTICO CREADO EN UN PUNTO SOBRE EL EJE DE UNA ESPIRA CIRCULAR

Consideremos una espira circular de radio R , como se muestra en la fig. 10.10, referido a un sistema de coordenadas rectangulares XYZ, en el cual eje de la espira coincide con el eje X. El campo magnético resultante en P, como veremos a continuación, es perpendicular al plano de la espira.

El campo $\Delta \vec{B}$ en un punto x del eje, puede ser descompuesto en sus componentes rectangulares $\Delta \vec{B}_x$ y $\Delta \vec{B}_y$, como se muestra en la figura. Analizando las componentes del campo, se puede ver que la componente en la dirección del eje Y es cero ya que, por simetría de la curvatura de la espira, todos los campos elementales que rodean a la mitad de una curvatura se oponen a los campos que rodean a la otra mitad, con lo cual dichos campos se compensan. Esto deja actuando sólo a la componente en la dirección del eje X. La magnitud del campo sobre un punto del eje X se calcula mediante la relación:

$$B_x = \frac{\mu_o I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (10.8)$$

Puede demostrarse, fácilmente, que la expresión anterior se convierte en la relación (10.6), haciendo $x = 0$.

Si el punto sobre el eje X está muy alejado del centro de la espira, es procedente no tomar en cuenta el término R^2 en el denominador ($r \gg R^2$), con lo cual (10.8) toma la forma;

$$B_x = \frac{\mu_o I R^2}{2x^3} \quad (10.9)$$

Ejemplo 10.3

Una espira circular, de radio 5,5 cm, transporta una corriente de 5 A, en el sentido contrareloj. Calcula: **a)** El campo magnético en el centro de la espira. **b)** El campo magnético sobre el eje X de la espira y a 12 cm de centro de su centro. **c)** El campo magnético sobre el eje X a 2,5 m del centro de la espira

Solución

a) En el centro de la espira, la magnitud del campo se calcula aplicando (10.6):

$$B = \frac{\mu_o I}{2R} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 5}{2 \cdot 5,5 \cdot 10^{-2}} = 5,71 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

b) Aplicando (10.8) se obtiene la magnitud del campo magnético a 12 cm del centro:

$$B_x = \frac{\mu_o I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot (5,5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot [(12 \cdot 10^{-2})^2 + (5,5 \cdot 10^{-2})^2]^{3/2}}$$

$$B_x = 4,13 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

c) Dado que la distancia 2,5 m es muy grande en relación con el radio R , se puede utilizar (10.9) para calcular la magnitud del campo a esa distancia:

$$B_x = \frac{\mu_o I R^2}{2x^3} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot (5,5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 2,5^3}$$

$$B_x = 6,08 \cdot 10^{-10} \text{ T}$$

10.6 FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES

En el capítulo 8 se estudió el caso de la acción de una fuerza magnética, que actúa sobre un conductor inmerso en un campo magnético, por el cual circula una corriente. Se describió, por otra parte, cómo una corriente que circula por un conductor, crea a su alrededor un campo magnético. De estos hechos se puede inferir que entre dos conductores paralelos, en los cuales fluyen corrientes y están separados por una distancia r se ejercen fuerzas magnéticas mutuas.

Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos, separados por la distancia r , por los que circulan las corrientes I_1 e I_2 , en la misma dirección, tal como se muestra en la fig. 10.11.

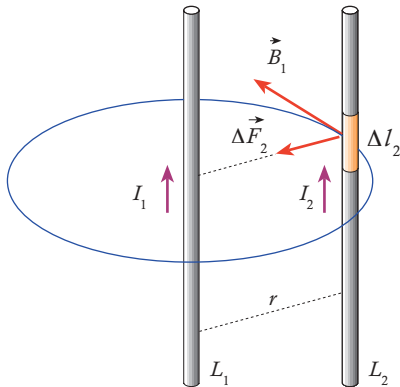


Fig. 10.11 Dos conductores largos, rectilíneos y paralelos, L_1 y L_2 conducen las corrientes I_1 e I_2 . La corriente I_1 produce el campo $\vec{B}_1$, perpendicular a L_2 , el cual ejerce sobre este último una fuerza magnética dirigida hacia el conductor L_1 . Una fuerza igual, pero de sentido contrario, genera sobre L_1 la corriente I_2 . Como resultado, los conductores se atraen.

Considera el conductor 1. La corriente I_1 que circula por este conductor producirá un campo magnético circular $\vec{B}_1$ a su alrededor, el cual afecta al conductor 2. En cualquier punto de la incidencia sobre el conductor 2, la dirección de $\vec{B}_1$ será perpendicular a dicho conductor, como puede verse en el fig. 10.11. Este campo $\vec{B}_1$ producirá una fuerza magnética, sobre una longitud L del conductor 2, cuya magnitud viene expresada por:

$$F_2 = I_2 L B_1 \sin\theta$$

Como L es perpendicular al campo magnético, $\sin 90^\circ = 1$ y, por tanto:

$$F_2 = I_2 L B_1 \quad (10.10)$$

Ahora bien, la magnitud de $\vec{B}_1$ a la distancia r del conductor 2, viene dada por (10.5):

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r}$$

Si se sustituye esta expresión en la relación anterior, se obtiene:

$$F_2 = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r} L \quad (10.11)$$

La dirección de $\vec{F}_2$, según la regla de la mano derecha, es hacia el conductor 1, o bien, en términos de vectores, la fuerza $\vec{F}_2$ apunta en la dirección del producto vectorial $\vec{L} \times \vec{B}$.

Un análisis similar, sobre la interacción del campo $\vec{B}_2$, producido por el conductor 2, sobre el conductor 1, demuestra que la fuerza magnética $\vec{F}_1$, que se ejerce sobre el conductor 1, es igual y opuesta a la fuerza $\vec{F}_2$, lo cual, por otra parte, está de acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton.

Para ver si la fuerza entre los conductores es de atracción o de repulsión, hay que tomar en cuenta las direcciones de las corrientes en los conductores. Como se acaba de describir, si las corrientes en los conductores fluyen en la misma dirección, la fuerza es de atracción, tal como se muestra en la fig. 10.12.

Si las corrientes tienen direcciones opuestas, las direcciones de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son, también, opuestas, por lo que los conductores se repelerán entre sí, esto se muestra en la fig. 10.13.

Dado que las magnitudes de las fuerzas son iguales para ambos conductores, se pueden unificar las mismas mediante la expresión:

$$F_{\text{magnética}} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r} L \quad (10.12)$$

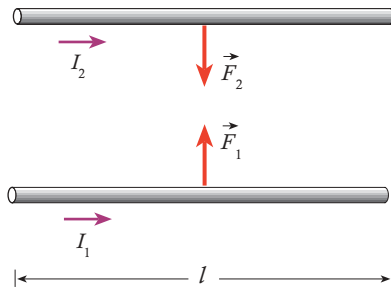


Fig. 10.12 Cuando las corrientes en dos conductores rectilíneos paralelos fluyen en la misma dirección, las fuerzas entre los conductores son iguales y opuestas y, por tanto, se produce una atracción entre los conductores.

Es común expresar la fuerza magnética en términos de la fuerza por unidad de longitud, con lo cual la relación (9.12) toma la forma:

$$\frac{F_{\text{magnética}}}{L} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r} \quad (10.13)$$

La relación (10.13), que representa la fuerza magnética por unidad de longitud entre conductores paralelos, por los cuales circulan corrientes eléctricas, se utiliza para definir el amperio en el Sistema Internacional de Medidas (SI). Tal definición fue adoptada en 1948 y se basa en lo siguiente: supongamos que se tienen dos conductores rectos y paralelos, que están separados exactamente por una distancia de 1 m, por los cuales circulan corrientes que tienen la misma magnitud, es decir, $I_1 = I_2 = I$. Cuando la magnitud de I genera un campo magnético, capaz de producir, por cada metro de longitud de conductor, una fuerza de interacción, de magnitud $2 \cdot 10^{-7}$ N la corriente I , que produce esta fuerza, se define como un amperio. Si sustituimos valores en (10.12) y despejamos I , se tiene:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi r F_{\text{magnética}}}{\mu_o L}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot (1 \text{ m}) \cdot (2 \cdot 10^{-7} \text{ N})}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T m}}{\text{A}} \cdot 1 \text{ m}}} = 1 \text{ A}$$

La unidad de carga eléctrica en el SI, el coulomb, se puede definir de acuerdo a lo anterior. Así, si por un conductor circula una corriente de 1 A, un coulomb será la cantidad de carga que fluye en un segundo, a través el área transversal del conductor.

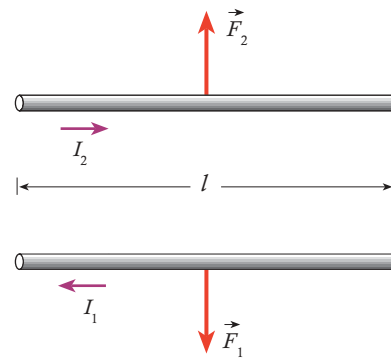


Fig. 10.13 Si las corrientes que circulan por los conductores paralelos lo hacen en direcciones contrarias, se produce una repulsión entre los mismos.

Ejemplo 10.4

Dos conductores paralelos de 35 m de longitud conducen cada uno una corriente de 15 A en la misma dirección. Si los conductores están separados 37 cm, calcular la magnitud y dirección de la fuerza entre ellos.

Solución

La fuerza de atracción entre los dos conductores por los campos magnéticos producidos por las corrientes que circulan por ellos, se calcula utilizando (10.12):

$$F = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r} L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15 \cdot 15}{2\pi \cdot 0,37} \cdot 35 = 4,26 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

10.7 CAMPO MAGNÉTICO DE UN SOLENOIDE

Un solenoide está constituido por un conductor muy largo, aislado y enrollado en forma de hélice, con muchas espiras circulares muy juntas, como se muestra en la fig. 10.14. Fue Ampere quien descubrió que al hacer circular una corriente por un solenoide, éste se comportaba como un imán de barra. La longitud de todo solenoide es siempre mayor que el diámetro de sus espiras, normalmente en la proporción de 5/1. Dentro del interior del solenoide, el campo magnético, producido por la

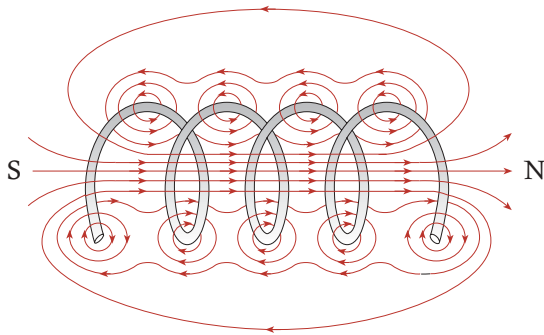


Fig. 10.14 Solenoide. Las líneas magnéticas están muy juntas en el centro, dando lugar a un campo muy intenso en esa zona. Fuera del centro y en el exterior del solenoide el campo es más débil.

corriente es uniforme e intenso. De la figura se observa la similitud de las líneas de campo del solenoide con las líneas de un imán recto tipo de barra. Un solenoide tendrá, entonces, un polo norte y un polo sur.

El uso del solenoide en la vida cotidiana es muy amplio. A nivel familiar, los solenoides operan timbres, controlan la operación mecánica de lavadoras, secadoras, hornos, etc. En la tecnología de los equipos electrónicos del hogar y oficinas, el solenoide es un componente importante de televisores, radios y computadoras.

A medida que la longitud de un solenoide se hace más grande, el campo magnético en su interior es más uniforme, mientras que el campo exterior al solenoide se hace cada vez más débil, debido a que las líneas de campo alrededor de cada espira en esta zona externa se compensan.

Es común aceptar el concepto del *solenoides ideal*, donde se considera que el campo interno es totalmente uniforme y el campo exterior es cero.

A medida que la corriente en un solenoide varía, el campo en su interior varía en forma proporcional. La variación del campo es, asimismo, proporcional al número de vueltas del solenoide, teniendo en cuenta que entre más compactas estén las espiras, mayor será el campo magnético. Partiendo de esta base, la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en el interior de un solenoide de N vueltas, por el que fluye

la corriente I , viene expresada por:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \quad (10.14)$$

A la expresión $N/L = n$ se le denomina *densidad de devanado* y es el número de vueltas por unidad de longitud. Sustituyendo esta expresión en (10.13):

$$B = \mu_0 nI \quad (10.15)$$

La dirección del campo magnético $\vec{B}$ se puede determinar tomando el solenoide con la mano derecha y curvando los dedos en la dirección de la corriente en las espiras, el pulgar extendido indica la dirección del campo.

Ejemplo 10.6

Un solenoide de 12 cm de longitud, contiene 250 espiras circulares, con un radio de 2 cm. Una corriente de 1,5 A fluye por el solenoide. Calcula la magnitud del campo magnético en su centro.

Solución

La magnitud del campo magnético se calcula a partir de la relación (10.15). El valor de n es:

$$n = \frac{N}{L} = \frac{250}{0,12} = 2,083 \cdot 10^3 \text{ espiras/m}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,083 \cdot 10^3 \cdot 1,5 = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

10.8 CAMPO MAGNÉTICO DE UN TOROIDE

Un toroide es un solenoide constituido por un gran número de espiras enrolladas alrededor de un anillo cerrado, como se muestra en la fig. 10.15. Con este dispositivo se puede crear un campo magnético, aproximadamente uniforme, dentro de un determinado volumen del espacio encerrado por las vueltas de las espiras. Cada línea del campo tendrá,

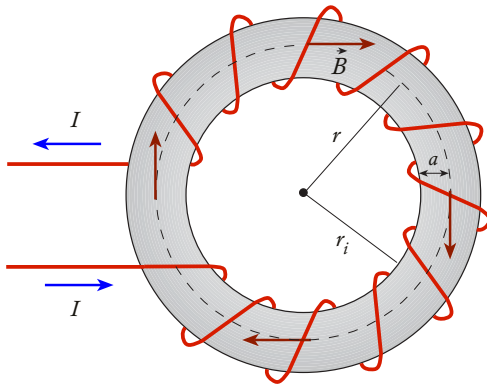


Fig. 10.15 Un toroide es un solenoide constituido por un gran número de espiras enrolladas alrededor de un anillo aislante cerrado.

dentro del toroide, una trayectoria circular debido a la forma circular del toroide y el campo magnético en esta trayectoria será tangente a la misma, tal como se muestra en la fig. 10.15, siendo su magnitud igual en todos los puntos de dicha trayectoria. El radio interno del toroide es r_i y el radio hasta la circunferencia media entre el radio interno y el externo es r . De acuerdo con la fig. 10.15, $r = r_i + a$. El campo magnético dentro del espacio interno del toro y a la distancia r del centro, viene expresado según la ley de Ampere por:

$$B = \frac{\mu_o NI}{2\pi r} \quad (10.16)$$

De acuerdo con esta ecuación, se puede ver que dentro del toroide el campo no es uniforme, pues el mismo depende de r . No obstante, si r es significativamente más grande que el radio del área transversal del toro, se considera que el campo es aproximadamente uniforme.

Al igual que el solenoide, cuando las espiras del toroide están bien apretadas entre sí, éste puede ser considerado como un dispositivo ideal, con lo cual el campo magnético en el interior del toroide es uniforme y el campo en el espacio que lo rodea es cero. En el toroide se logra, pues, confinar el campo magnético dentro de su espacio interior.

El toroide tiene muchas aplicaciones en la tecnología

de las comunicaciones, ellos forman parte de los circuitos de radios y televisores; también se han usado en la fusión termonuclear. En el proyecto *tokamak*, un toroide con un campo magnético muy grande, producido por una corriente de aproximadamente de 1 a 2 millones de amperios, mantiene confinado en su espacio interno, a una temperatura de aproximadamente 100 millones de grados, una mezcla de átomos de hidrógeno y sus isótopos el deuterio y el tritio, en estado de fusión o plasma, como se le conoce, para producir átomos de helio. Durante este proceso se generan inmensas cantidades de energía, que pueden ser aprovechadas para producir electricidad. El proyecto, concebido originalmente en Rusia, en la época de la URSS, está todavía en etapa de experimentación en muchos países, desde hace aproximadamente 50 años.

Ejemplo 10.7

Un toroide, con un radio interno de 17 cm, está constituido por 500 espiras circulares de un conductor por el que circula una corriente de 1,5 A. El área transversal del círculo del toroide es de 28,26 cm². Calcula la magnitud del campo magnético en el centro del toroide.

Solución

La magnitud del campo magnético puede ser calculado por (10.16). Para ello, se debe calcular previamente el valor de la distancia $r = r_i + a$. Para calcular a , utilizamos la fórmula del área transversal del toroide:

$$A = \pi a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{28,26}{\pi}} = 3 \text{ cm}$$

Como $r = 17 + a$, $r = 17 + 3 = 20 \text{ cm}$.

Sustituyendo valores en (10.16), resulta:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1,5}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

10.9 MATERIALES MAGNÉTICOS

Luego del descubrimiento de Oersted sobre la generación de un campo magnético alrededor de un conductor, cuando por éste circula una corriente eléctrica, Faraday continuó las investigaciones sobre este fenómeno, encontrando que se producía una corriente en un conductor, cuando se acercaba a otro por el cual fluía una corriente. Tiempo más tarde, descubrió que se producía una corriente en un circuito, cuando se acercaba o alejaba un imán del circuito. Esto lo llevó a la conclusión que bastaba sólo con variar la magnitud del campo, para producir corriente en el circuito.

Después de estos importantes descubrimientos y con el conocimiento moderno sobre la estructura del átomo, se llegó a la conclusión que el campo magnético es el producto del movimiento de los electrones dentro del átomo. Ahora bien, se sabe que el electrón tiene dos tipos de movimientos: uno de traslación alrededor del núcleo del átomo y uno de rotación sobre sí mismo. Este último recibe el nombre de *spin*, palabra inglesa que se refiere al giro alrededor de un eje imaginario que pasa por el centro del objeto que gira. Cuando el electrón se mueve alrededor del núcleo, por ser una carga en movimiento, crea un campo magnético y al girar sobre sí mismo, como un trompo, crea también un campo magnético. Se ha descubierto, que en la mayoría de los materiales, predomina el campo producido por el movimiento de rotación o *spin* del electrón, sobre el campo generado por el movimiento orbital. Se sabe, también, que no todos los electrones rotan en la misma dirección. Cuando dos electrones rotan en la misma dirección, los campos producidos por cada uno de ellos se suman, por lo que se hace más intenso; en cambio, si rotan en direcciones contrarias, los campos se anulan. Esto explica por qué la mayoría de las sustancias no manifiestan propiedades magnéticas. No obstante, todo material en la naturaleza, es capaz de interactuar magnéticamente, ante una adecuada intensidad de un campo magnético externo.

Haciendo referencia a la ley de Biot-Savart, recordemos que en la relación (10.1) aparece la constante μ_o , conocida como constante de permeabilidad en el espacio libre, cuyo valor en el vacío es $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m/A}$. Cuando se coloca un ma-

terial en un campo magnético, es necesario tomar en cuenta su propia permeabilidad, la cual se representa por μ . Entonces, hablamos de la permeabilidad en el aire, μ_o , y de la permeabilidad propia del material, μ . La relación entre estas dos permeabilidades se conoce como *permeabilidad relativa* y es igual a:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_o} \quad (10.17)$$

Desde el punto de vista del magnetismo, todos los materiales se clasifican de acuerdo con el valor de su permeabilidad relativa. Por otra parte, todos los materiales de la naturaleza, de acuerdo a su comportamiento frente a un campo magnético, y según su permeabilidad relativa, se dividen en tres grupos:

1. Materiales diamagnéticos

En estos materiales $K_m < 1$. Estos materiales son repelidos por un campo magnético fuerte. Los plásticos, el agua, la madera, el vidrio, el oro, el hidrógeno, entre otros, son materiales diamagnéticos. El comportamiento magnético de estos materiales se explica, a nivel atómico, por el movimiento orbital de los electrones, alrededor del núcleo del átomo. Los electrones, al interactuar con un campo magnético externo, generan un campo que se opone al campo externo aplicado.

2. Materiales paramagnéticos

Tienen una $K_m > 1$. Estos materiales tienen un comportamiento débil frente a un campo magnético. Aun cuando todos sus átomos tienen siempre un campo magnético dipolar neto, pues muchos de sus electrones rotan en la misma dirección, reforzando con ello el campo, el movimiento desordenado de los átomos debido a la agitación térmica hace que sus campos no tengan una dirección constante, anulándose mutuamente en su mayor parte. Entre estos materiales se pueden citar el aluminio, el platino, el sodio, el oxígeno y otros.

3. Materiales ferromagnéticos

Para estos materiales $K_m \gg 1$ y los campos producidos por el movimiento de rotación sobre sus

ejes no se anulan en su totalidad, por lo que son portadores de fuertes propiedades magnéticas.

Los elementos hierro, níquel y cobalto y otras sustancias como la magnetita y varias aleaciones de metales, como el acero y el alnico, pertenecen a este grupo de los ferromagnéticos. En ellos, el campo magnético de cada átomo, por ser de gran intensidad, interacciona fuertemente con los átomos vecinos, lo que hace que se formen grandes grupos de átomos alineados. Estos grupos de átomos alineados se denominan *dominios magnéticos*. Cada dominio magnético es un verdadero imán. En realidad, son imanes microscópicos constituidos por millones y millones de átomos. Todo material ferromagnético que no haya recibido ninguna influencia por un campo magnético externo, tiene sus dominios orientados al azar, como se muestra en la fig. 10.16, por lo que no manifiestan propiedades magnéticas, pues sus campos se anulan. Pero cuando estos materiales se sitúan en un campo magnético externo, ocurren dos efectos:

a. La mayoría de los dominios se alinea con el campo aplicado y el tamaño de los mismos aumenta arrebatándole espacio a los dominios que no se hayan alineado. Esta condición de alineamiento resulta en muchos casos inestable, por lo que el material magnetizado, al retirar el campo externo, se desmagnetiza por sí solo y sus dominios pierden su orientación, entrando a su estado eleatorio primitivo.

b. Cuando se aplica un campo intenso a la sustancia ferromagnética, todos los dipolos magnéticos dentro de cada dominio se alinean con el campo y la

sustancia adquiere la propiedad de estar magnetizada, como se muestra en la fig. 10.17. La magnetización, lograda de esta manera, tiene la particularidad de permanecer más o menos completa y estable, al anularse el campo externo. La magnetización que queda en el material después de anular el campo externo, se denomina *magnetización remanente* y el material, en estas condiciones, se comporta como un imán permanente. Esta es una de las diferencias más importantes con los materiales paramagnéticos, pues en estos últimos, no queda magnetismo remanente, al anular el campo externo.

En la práctica, se crean imanes permanentes, simplemente frotando un trozo de hierro con un imán, pues al realizar el frotamiento, los dominios en el hierro se alinean. También se logra un imán permanente, acercando un trozo de hierro a un campo magnético intenso. De esta manera, podemos comprender por qué, cuando acercamos un imán a un trozo de hierro no magnetizado, éste es atraído por el imán y cuando se esparcen limaduras de hierro en un campo magnético, las mismas se alinean en la dirección del campo. Esto se debe, simplemente, a que los dominios en el trozo de hierro o en las limaduras se alinean y se convierten en imanes.

Los imanes permanentes pueden fácilmente perder su magnetismo al golpearlos o dejarlos caer desde cierta altura, ya que los dominios pueden perder su alineamiento. Por otra parte, también el calentamiento puede hacer perder la alineación de los dominios, por el incremento en la energía del movimiento de los átomos, con lo cual el magne-

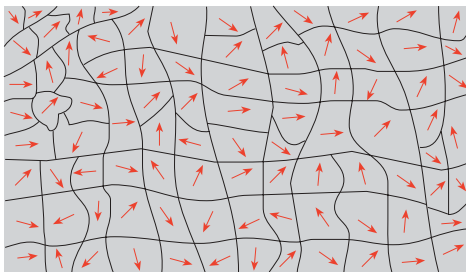


Fig. 10.16 Una sustancia ferromagnética cuando está libre de cualquier influencia magnética, tiene sus dominios orientados al azar.

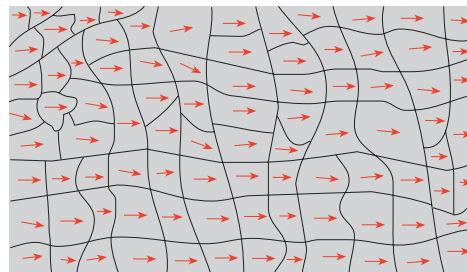


Fig. 10.17 Cuando se aplica un campo magnético fuerte a una sustancia ferromagnética, cada dominio se alinea con el campo y la sustancia queda magnetizada en forma permanente.

tismo remanente disminuye y, en condiciones extremas, desaparece totalmente. Esto último ocurre cuando se sobrepasa una temperatura crítica, la llamada *temperatura Curie*, característica para cada tipo de material. Así, para el hierro la temperatura crítica es de 770° C.

10.10 EL ELECTROIMÁN

Ya vimos que el campo creado por un solenoide hace que éste se comporte como un verdadero imán, con su polo norte y un polo sur. Usualmente, las vueltas del solenoide se devanan normalmente al aire libre o sobre un armazón no magnético, tal como cartón o madera. Cuando se introduce en el interior del solenoide un núcleo de material ferromagnético, el campo creado puede resultar miles de veces mayor que el campo original del solenoide.

Esta propiedad de los materiales ferromagnéticos, es empleada para fabricar electroimanes, que no son otra cosa que un conductor aislado, enrollado en forma de un solenoide, alrededor un núcleo de hierro, tal como se muestra en la fig. 10.18. El hierro que se utiliza como núcleo del electroimán, es el llamado hierro blando o dulce, que tiene la

propiedad de desimantarse; es decir, sus dominios se desalinean de inmediato cuando el campo externo se hace nulo.

Al conectar un electroimán, el núcleo se convierte en un imán, cuyo campo se suma al campo creado por la corriente que circula en el conductor. El campo total, generado en el electroimán viene expresado por:

$$B = \mu n I \quad (10.18)$$

donde n es el número de vueltas del conductor, enrolladas sobre el núcleo, por unidad de longitud y μ es la permeabilidad del núcleo. Observa que esta ecuación es similar a la relación (10.15) que expresa el campo en un solenoide, su diferencia estriba en la constante de permeabilidad. De la relación (10.17) se tiene:

$$\mu = K_m \mu_o \quad (10.19)$$

De las relaciones anteriores, se tiene:

$$B = K_m \mu_o n I \quad (10.20)$$

Donde K_m es la permeabilidad relativa.

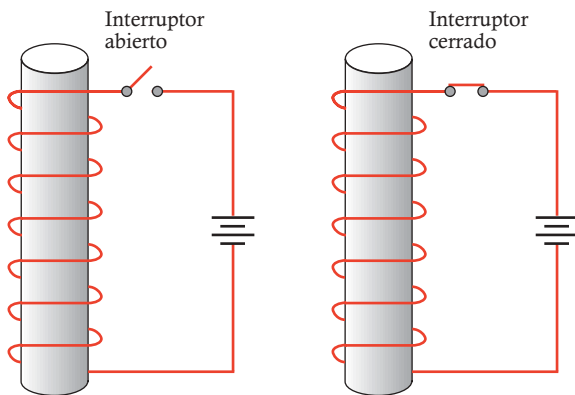
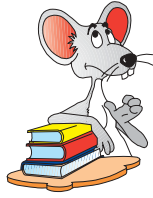


Fig. 10.18 Esquema de un electroimán constituido por un solenoide con núcleo de hierro dulce. Con este dispositivo se logra crear un campo magnético miles de veces mayor al de un solenoide sin el núcleo de hierro dulce.



PIENSA Y EXPLICA



- 10.1** Describe brevemente el descubrimiento de Oersted. ¿Formuló Oersted una teoría que pudiera explicar cuantitativamente el fenómeno descubierto? De ser positiva la respuesta, dar una breve explicación sobre el particular.
- 10.2** Biot y Savart formularon una ecuación que permite calcular el campo magnético creado por una corriente que circula por un conductor en cualquier punto. ¿Cómo hicieron para saber que una corriente eléctrica crea un campo magnético?
- 10.3** La relación $B = \mu_0 I / 2\pi r$ muestra que en la cercanía de un conductor, por el que fluye una corriente I , se produce un campo magnético. Justifica por qué, aun cuando se tenga una corriente I y un campo magnético B , no se produce sobre el conductor una fuerza, de acuerdo con la relación $\vec{F}_{mag.} = q\vec{v} \times \vec{B}$. (Sugerencia: recordar las leyes del movimiento de Newton).
- 10.4** ¿Crees tú que un haz de electrones de un cinescopio o cañón electrónico de televisión, tenga asociado un campo magnético? Explica.
- 10.5** Considera una espira por la que fluye una corriente I . Explica dónde será mayor el campo magnético: en el centro o fuera del centro de la espira.
- 10.6** Si dos conductores rectos y paralelos conducen corrientes en direcciones opuestas, surgen, entre ellos, fuerzas de repulsión. Explica por qué ocurre esto.
- 10.7** En un solenoide circula una corriente I . Explica qué le ocurre al campo magnético en el interior del solenoide si: **a)** La corriente se duplica, lo mismo que su longitud. Se mantiene constante el número de vueltas. **b)** La corriente se duplica, igual el número de vueltas, manteniendo la misma longitud.
- 10.8** Se coloca un conductor en la dirección N – S y se hace circular una corriente en la dirección S – N. Explica cómo interactúa el campo magnético del conductor con la aguja de una brújula: **a)** Si ésta se coloca encima del conductor. **b)** Si se invierte la dirección de la corriente y la aguja se coloca debajo del conductor. **c)** Si la aguja se coloca a la izquierda del conductor.
- 10.9** Una aguja magnética se coloca en el interior de un solenoide (fig. 10.19). Al cerrar el circuito, dibuja la posición en que se sitúa la aguja.

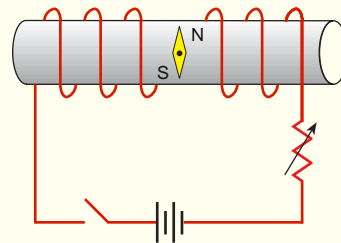


Fig. 10.19 Piensa y Explica 10.9.

10.10 Supón que te dan dos trozos de hierro en forma de barra, uno ellos es un imán, pero tú no sabes cuál es y, además, no dispones de ningún material adicional, ni un equipo de prueba que te permitan identificar uno del otro. ¿Qué podrías hacer, para saber con exactitud, cuál de los dos trozos de hierro es el imán?

10.11 La fig.10.20 muestra un solenoide conectado a una batería, de la cual no se conocen las polaridades de sus bornes; en cambio, el solenoide si tiene marcados su polo norte y su polo sur. Identifica cuál es el borne positivo y cual el negativo.

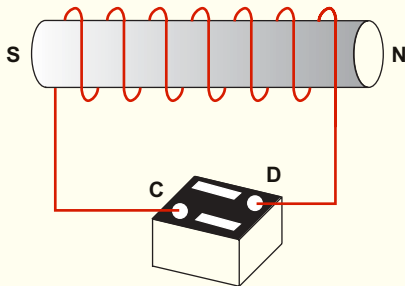


Fig. 10.20 Piensa y Explica 10.11.

10.12 Explica por qué si se golpea un imán con un objeto o se deja caer de cierta altura sobre un piso, el imán puede perder parte de su magnetismo.

10.13 Las limaduras de hierro no son imanes; sin embargo, cuando están en presencia de un campo magnético se alinean en la dirección de este campo. Explica por qué ocurre esto.

10.14 ¿Qué son los dominios magnéticos y cómo se forman?

10.15 Describe y da ejemplos sobre lo que es una sustancia paramagnética, una sustancia diamagnética y una sustancia ferromagnética.

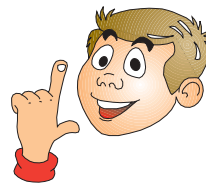
10.16 Explica por qué la temperatura Curie es importante tenerla en cuenta para los materiales ferromagnéticos.

10.17 ¿Por qué, si a una bobina se le introduce un trozo de hierro, el campo magnético en su interior aumenta?

10.18 Explica por qué se utiliza hierro blando o dulce para construir los núcleos de los electroimanes.



PROBLEMAS



10.1 En el modelo clásico del átomo, un electrón tiene un movimiento circular alrededor del núcleo a la velocidad de $2,19 \cdot 10^6$ m/s. El radio de la trayectoria circular es de $5,29 \cdot 10^{-11}$ m. Calcula el campo magnético producido por el electrón, en el núcleo del átomo.

10.2 Un conductor muy largo y recto conduce una corriente de 12 A. **a)** Calcula el campo magnético en un punto distante 18 cm del conductor. **b)** Haz un diagrama que muestre la dirección del campo y la dirección de la corriente.

10.3 a) Se tiene un conductor, por el que circula una corriente de 12 A. A dicho conductor se le ha dado forma de cuadrado, con los lados $L = 35$ cm. Calcula el campo magnético en el centro del cuadrado. b) Si el mismo conductor se arregla en forma de una espira y conduce la misma corriente, calcula el campo magnético en el centro de dicha espira.

10.4 Un conductor con forma de espira semicircular, cuyo centro es P, y de radio 18 cm, como se muestra en la fig. 10.21, conduce una corriente de 8 A. Calcula el campo magnético en el punto P.

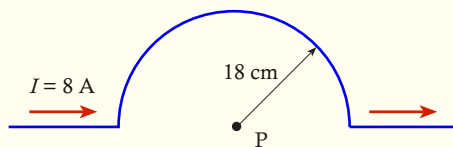


Fig. 10.21 Problema 10.4.

10.5 Una espira circular de longitud 25 mm conduce una corriente de 12,5 mA. Calcula: a) La magnitud del momento dipolar magnético de la espira. b) La magnitud del campo magnético en un punto, a una distancia del centro de la espira de 1,5 m sobre el eje de la espira. c) La magnitud del campo magnético en el centro de la espira.

10.6 Se tienen dos conductores largos y paralelos L_1 y L_2 separados una distancia de 16 cm, los cuales conducen corrientes $I_1 = 12$ A, e $I_2 = 8$ A. Calcula: a) El campo magnético en el punto medio de una recta perpendicular que los une. b) El punto sobre dicha recta donde el campo magnético es cero.

10.7 Por dos conductores muy largos C_1 y C_2 circulan las corrientes $I_1 = 8$ A, e $I_2 = 12$, tal como se muestra en la fig. 10.22. Calcula la magnitud del campo magnético en el punto P.

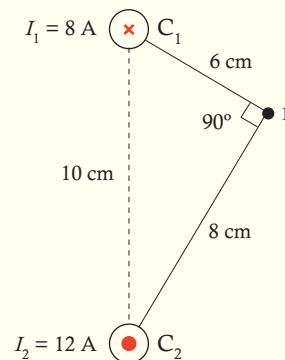


Fig. 10.22 Problema 10.7.

10.8 Dos conductores largos y paralelos están separados 12 cm. El conductor C_1 conduce una corriente de $I_1 = 15$ A y el conductor C_2 una corriente de $I_2 = 9$ A. Las direcciones de las corrientes se muestran en la fig. 10.23. Calcula el campo magnético: a) En el punto A ubicado en el medio de la distancia entre los conductores. b) En el punto B. c) En el punto C.

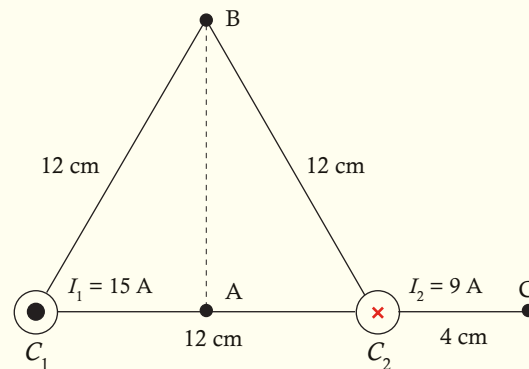


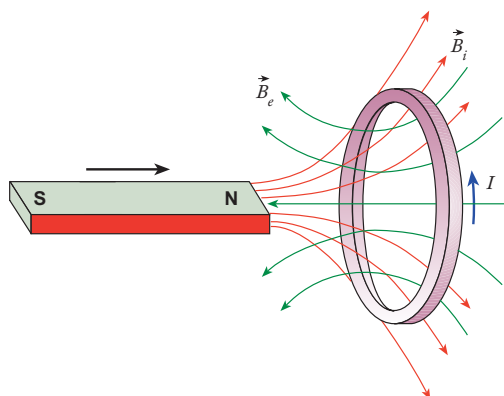
Fig. 10.23 Problema 10.8.

10.9 Un solenoide largo, con 475 vueltas por metro lineal, conduce una corriente de 5,7 A. Calcula: **a)** La magnitud del campo magnético en el centro del solenoide. **b)** Las vueltas que tiene el solenoide, si su longitud es de 15 cm.

10.10 Un solenoide de 15 cm de longitud, tiene un radio de 2 cm. Si por este solenoide circula una corriente de 1,5 A para producir un campo magnético en su centro, de magnitud 75 mT, calcula el número de vueltas de conductor de dicho solenoide.

10.11 La sección circular de un solenoide de 12 cm, mide $2,75 \text{ cm}^2$. Si existe un campo magnético de magnitud 2,5 mT, en el centro del solenoide, debido a una corriente de 1,25 A, calcula: **a)** El número de vueltas que tiene el solenoide. **b)** La longitud del conductor utilizado en el solenoide.

10.12 Un toroide de radio 15 cm y de sección transversal $S = 28 \text{ cm}^2$ tiene 750 vueltas de conductor aislado. Un campo magnético de magnitud $5,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ se detecta en el centro del toroide. Calcula la corriente necesaria para producir este campo magnético.



CAPÍTULO 11

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

En el capítulo 8, cuando se trató sobre el origen del campo magnético, se dijo que Oersted, físico danés, realizó, en el año de 1820, lo que se ha considerado como el primer gran descubrimiento sobre el electromagnetismo. Dicho descubrimiento consistió en haber encontrado, *que toda corriente eléctrica al fluir por un circuito, crea a su alrededor un campo magnético*. Un año después de este extraordinario acontecimiento, el físico inglés Michael Faraday escribió en su diario «Transformar magnetismo en electricidad». Así, doce años después del hallazgo de Oersted, Faraday encontró, luego de muchos y fallidos experimentos, que cuando movía un imán cerca de un circuito, acercándolo o alejándolo, se producía en éste una corriente eléctrica. Faraday descubrió, también, que esta corriente eléctrica, la cual no era impulsada por alguna fuente como una batería, era debida a la producción de un campo eléctrico especial en el circuito, llamado *campo eléctrico inducido*, el que a su vez generaba una fuerza eléctrica inducida (fem), que ponía en movimiento las cargas, creando la corriente eléctrica. Todo esto era consecuencia de mover el imán cerca del circuito. Los experimentos llevados a cabo por Faraday condujeron a otro de los grandes descubrimientos de la Física: *la inducción electromagnética*, la cual, como se verá en detalle más adelante, representa la transformación de la energía mecánica en energía eléctrica. Uno de los mecanismos más representativos de esta transformación, son las *generadores eléctricos*, máquinas que transforman, en base a la inducción electromagnética, energía mecánica en energía eléctrica. Por ejemplo, el agua represada a una gran altura posee energía potencial gravitatoria, la cual, al caer,

se transforma en energía cinética que, a la vez, es utilizada para mover turbinas que impulsan generadores para producir electricidad en las centrales hidroeléctricas.

Faraday realizó numerosos experimentos sobre la inducción, utilizando diferentes métodos. El resultado fue siempre la generación de una fem inducida. Al final, todos estos métodos los englobó en una ley que lleva su nombre, la cual relaciona la fem inducida en un circuito con la variación del flujo magnético a través del mismo.

11.1 EL FLUJO MAGNÉTICO

Para comprender con claridad la ley de Faraday, es importante introducir el concepto de *flujo magnético a través de una superficie*, el cual es similar al concepto de flujo de un campo eléctrico.

Consideremos una espira rectangular de área A , situada en un campo magnético $\vec{B}$, como se muestra en la fig. 11.1. Con el objeto de relacionar la orientación de la espira con el campo magnético, la superficie de la espira se representa por el vector $\vec{A}$, perpendicular a la misma.

Sabemos que el campo magnético de un imán se representa por líneas que salen del polo norte y se orientan hacia el polo sur. Este conjunto de líneas, recibe el nombre de *flujo magnético* y aquella cantidad de líneas que atraviesa una superficie, en este caso la superficie de la espira rectangular, se mide como el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

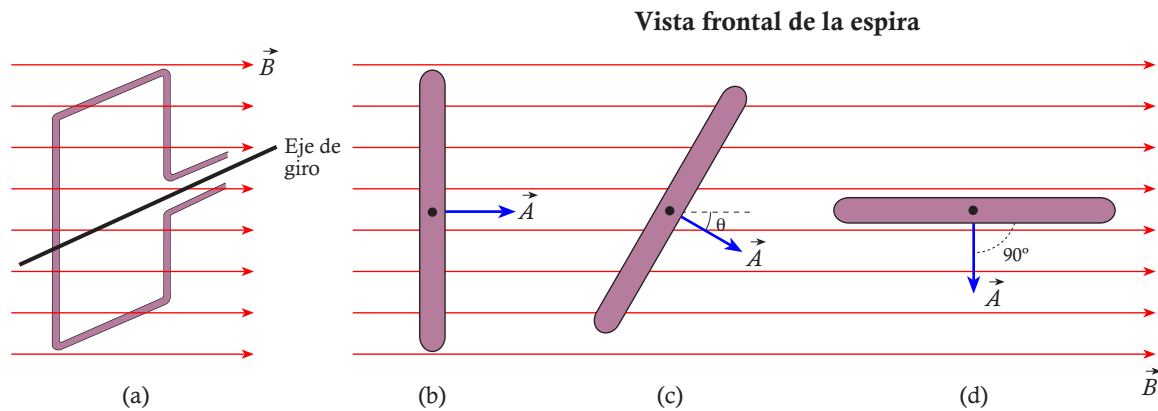


Fig. 11.1 a) Espira que rota en un campo magnético uniforme. b) En esta posición, la superficie de la espira es atravesada por un flujo magnético máximo dado por $\theta = BA$, pues $\theta = 0^\circ$ y $\cos\theta = 1$. c) El flujo que atraviesa la superficie de la espira es menor que en el caso anterior y está dado por $\theta = BA\cos\theta$. d) El flujo a través de la superficie es cero, ya que $\theta = 90^\circ$ y $\cos 90^\circ = 0$.

Se tiene, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \Phi_{mag} = AB \cos\theta \quad (11.1)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El factor $\cos\theta$, en esta expresión, indica que la orientación de la espira, en relación al campo magnético, modifica, en cualquier instante de tiempo, la cantidad de líneas que atraviesa dicha espira. La fig. 11.1 muestra una secuencia del movimiento de rotación de la espira, alrededor de un eje que pasa por su centro. Así, la fig. 11.1(b) muestra el caso donde los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$. Entonces:

$$\Phi_{mag} = AB \quad (11.2)$$

En este caso, el área de la espira es atravesada por el máximo número de líneas de campo posible. Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, como lo indica la fig. 11.1(d), se tiene que $\theta = 90^\circ$ y $\cos 90^\circ = 0$. Por lo tanto, $\Phi_{mag} = 0$. Este resultado indica que ninguna línea del campo magnético pasa a través de la superficie de la espira. En cualquier otra posición del movimiento, la cantidad de flujo magnético que atraviesa la superficie de la espira estará dada según el ángulo que tenga con la dirección del campo magnético

La unidad del flujo magnético en el SI es el *weber* (abreviado Wb) en honor a Wilhelm Weber (1804-1891), quien fuera uno de los primeros investigado-

res de la ciencia del magnetismo. Si la magnitud del campo $\vec{B}$ se mide en Teslas (T) y la magnitud de $\vec{A}$ en metros cuadrados (m^2), se tiene:

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ T} \cdot m^2$$

Cuando se trata de varias espiras, como las que conforman una bobina, el flujo total que la atraviesa es igual al flujo a través de una espira, multiplicado por las N espiras de la bobina. En este caso el flujo viene dado por:

$$\Phi_{mag} = NAB \cos\theta \quad (11.3)$$

Ejemplo 11.1

Una bobina constituida por 25 espiras cuadradas, cuyos lados miden 7 cm, se encuentra en un campo magnético uniforme de magnitud 0,75 T. Calcula: a) El flujo magnético a través de la bobina, cuando el vector área $\vec{A}$ es paralelo al vector campo $\vec{B}$. b) El flujo magnético, si el vector superficie $\vec{A}$, forma un ángulo de 60° con el vector campo $\vec{B}$.

Solución

a) El flujo magnético se calcula aplicando la relación (11.3). Para ello, previamente se calcula el área de una espira:

$$A = (7 \cdot 10^{-2})(7 \cdot 10^{-2}) = 49 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Ahora bien, como el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$ son paralelos, por ser $\vec{B}$ perpendicular al plano de la bobina, $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$. Sustituyendo valores:

$$\Phi_{mag} = NAB \cos\theta = 25 \cdot (49 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,75$$

$$\Phi_{mag} = 9,18 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

b) Cuando el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 60° , $\cos 60^\circ = 0,5$ y el flujo magnético es:

$$\Phi_{mag} = NAB \cos\theta = 25 \cdot (49 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,75 \cdot 0,5$$

$$\Phi_{mag} = 4,59 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Ejemplo 11.2

Se tiene un solenoide de 37 cm de longitud, constituido por 450 espiras circulares de radio 2,25 cm. Si por el solenoide fluye una corriente de 15 A, calcula el flujo magnético a través del solenoide.

Solución

Como se ha estudiado en el capítulo 10, el campo magnético dentro de un solenoide es aproximadamente uniforme y apunta en la dirección de su eje, siendo, por lo tanto, perpendicular al plano de las espiras. Así se tiene:

$$\Phi_{mag} = NAB$$

El campo magnético dentro del solenoide viene dado por la relación (10.15), capítulo 10:

$$B = \mu_o nI$$

donde $n = N/L$. Se tiene:

$$\Phi_{mag} = NA \frac{\mu_o N}{L} I = \frac{\mu_o N^2 I A}{L}$$

El área de las espiras viene dada por $A = \pi r^2$. Luego:

$$\Phi_{mag} = \frac{\mu_o N^2 I (\pi r^2)}{L}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\Phi_{mag} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7})(450)^2(15) \cdot \pi \cdot (2,25 \cdot 10^{-2})^2}{37 \cdot 10^{-2}}$$

$$\Phi_{mag} = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

11.2 LEY DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE FARADAY

Con el objeto de comprender con claridad el fenómeno de la inducción electromagnética, se explicarán, a continuación, algunos de los experimentos realizados por Faraday, cuando trabajaba en su afán de llevar a la práctica su objetivo de transformar el magnetismo en electricidad.

1. Uno de los aparatos utilizado en sus primeras experiencias, consistió en dos bobinas montadas sobre un núcleo de madera, una de las cuales, denominada bobina primaria, se conectaba, mediante un interruptor, a una batería de gran capacidad, y la otra, conocida como bobina secundaria, se conectaba en serie con un galvanómetro muy sensible, tal como se muestra en la fig. 11.2.

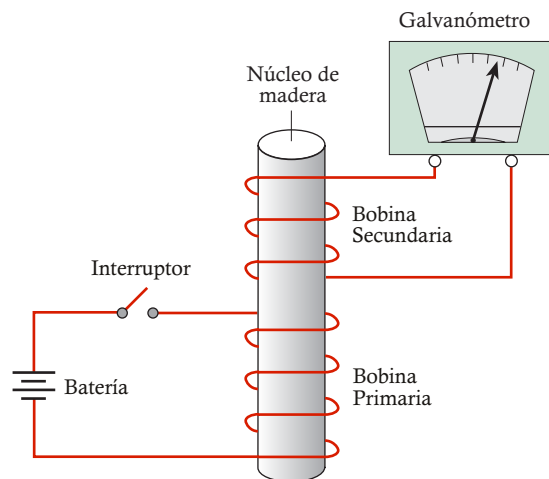


Fig. 11.2 Esquema del dispositivo usado por Faraday en sus experimentos sobre la inducción electromagnética. Una corriente, suministrada por una batería, varía al cerrar o abrir el interruptor, creando un flujo magnético variable con el tiempo en la bobina primaria. Este flujo variable induce una corriente transitoria en la bobina secundaria

Faraday pudo comprobar que, en el instante que cerraba el interruptor, la aguja del galvanómetro se desviaba en una dirección, regresando de inmediato a cero, no obstante que la corriente en la bobina primaria continuaba fluyendo normalmente. Luego, cuando abría el interruptor, precisamente en el momento de hacerlo, la aguja del galvanómetro, volvía a desviarse, pero en este caso lo hacía en dirección opuesta a la anterior, regresando también de inmediato a cero. El experimento lo repitió, utilizando un núcleo de hierro dulce en forma de anillo (toroide), para aumentar la permeabilidad al paso del flujo magnético. En este caso, el movimiento de la aguja en el galvanómetro se hizo más patente, confirmando que un campo magnético, variable con el tiempo, genera una fem capaz de impulsar una corriente eléctrica en un circuito.

2. La fig. 11.3 muestra una espira conectada en serie con un galvanómetro y un imán permanente, tipo de barra. Si el imán se mantiene fijo como se muestra en la fig. 11.4(a), el flujo magnético pasa a través de la espira, pero en forma constante y uniforme. La aguja del galvanómetro marcará cero, indicando la ausencia de una corriente en la espira. Si el imán, se mueve hacia la espira, como se muestra en la fig. 11.4(b), el flujo magnético aumenta según transcurre el tiempo, atravesando en forma creciente la espira. El galvanómetro detectará una corriente, dirigida en un sentido, como el mostrado en la figura. Si la rapidez con que se mueve el imán es grande, mayor será la rata de cambio del flujo magnético en relación al tiempo, y mayor será la corriente inducida en la espira. Si el imán se detiene, la aguja del galvanómetro indicará cero, pues el flujo magnético que atraviesa la espira, se hace constante. Si se retira el imán como se muestra en la fig. 11.4(c), el flujo magnético que enlaza la espira disminuye, el galvanómetro marcará una corriente, pero dirigida ahora, en sentido contrario, como se muestra en la figura. Igualmente, en este caso, mientras mayor sea la rapidez con que el imán se retira, mayor será la rata de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo a través de la espira, y mayor será, por consiguiente, la corriente inducida que detectará el galvanómetro.

En resumen: el galvanómetro detecta una corriente en la espira sólo cuando el flujo magnético que la atraviesa está cambiando con el tiempo; la corriente

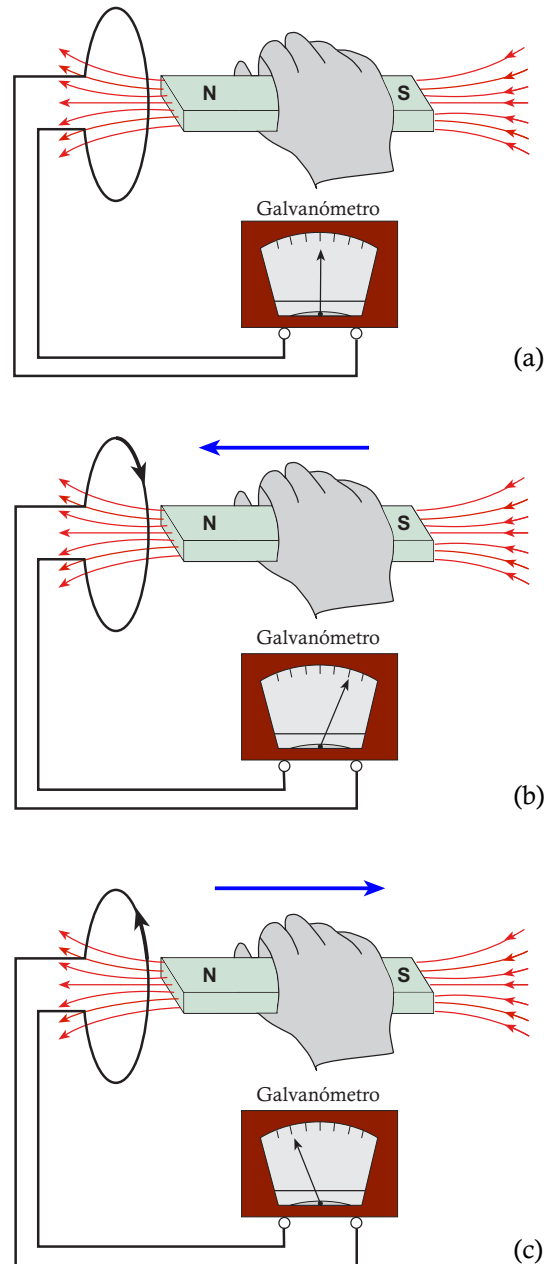


Fig. 11.3 El imán de barra se acerca y se aleja de una espira conectada a un galvanómetro. a) El imán no se mueve: la espira es atravesada por un flujo constante, el galvanómetro marca cero, no hay inducción en la espira. b) El imán se mueve hacia la espira: se incrementa el flujo que atraviesa la misma, se induce una corriente en la espira y el galvanómetro se desvía a la derecha. c) El imán se aleja de la espira: el galvanómetro se desvía hacia la izquierda, lo que indica que la corriente inducida fluye en dirección contraria.

será tanto mayor, mientras más rápido se mueva el imán pues, con esto, la rata de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo será mayor. Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira es constante; es decir, no cambia con el tiempo, el galvanómetro no detectará ninguna corriente, señal de que no se ha producido ninguna corriente en la espira. Se observa, también, que cuando el imán se acerca a la espira, aumentando con esto la razón de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo, la corriente se manifiesta en una dirección y cuando el imán se retira, disminuyendo el flujo magnético con el tiempo, la corriente fluye en la dirección opuesta.

Como se ha visto, en estos experimentos se produce una corriente en una espira, sólo si un flujo magnético que la atraviese está variando con el tiempo. A la fem creada en la espira, que impulsa una corriente en ella, se denomina *fem inducida* y a la corriente se le llama *corriente inducida*. Son inducidas, porque no son producidas por una batería, ni ninguna otra fuente: se generan por el flujo magnético de un campo que varía con el tiempo, mientras pasa a través de la espira.

Los resultados de los experimentos descritos, llevó a Faraday a establecer que, *la fem inducida en un circuito es igual a la rapidez con la que cambia el flujo magnético a través del mismo*. En términos cuantitativos, este enunciado se expresa mediante la ecuación:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi_{mag}}{\Delta t} \quad (11.4)$$

La relación (11.4) recibe el nombre de *ley de inducción electromagnética de Faraday*. El signo menos en la ecuación, indica la dirección de la fem inducida y el mismo será tratado en la siguiente sección, dedicada a tratar la ley de Lenz.

Si en lugar de una sola espira, se trata de una bobina constituida por N espiras, cada una con la misma área, el flujo magnético variable inducirá una fem igual en cada espira, la cual estará en serie con las demás; por lo tanto, la fem inducida en todo el circuito de la bobina será:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi_{mag}}{\Delta t} \quad (11.5)$$

La denominación de *fuerza electromotriz*, acuñada por Faraday, en realidad no corresponde a la definición física de fuerza, por lo que, normalmente, en todos los textos de física, esta expresión se escribe y se usa sólo por las siglas *fem*.

La unidad SI de fem es el Wb/s y es igual a 1V; es decir:

$$1 \text{ Wb/s} = 1 \text{ V}$$

Si el cambio del flujo es constante, esto es, cuando el cambio del flujo magnético se lleva a cabo a una tasa constante, la magnitud de la fem inducida será constante, con total independencia de si el flujo aumenta o disminuye. Esto da pie para afirmar, una vez más, que la magnitud de la fem inducida depende sólo de la variación de la tasa del flujo magnético en relación con el tiempo y no de la magnitud del campo. Así, se puede obtener una fem mayor de un imán débil que se mueva con rapidez, a la obtenida con un imán potente, que se mueva lentamente.

Ejemplo 11.3

Una bobina circular plana, está constituida por 250 espiras de conductor aislado, con una resistencia total de 15Ω y un radio de de 5 cm. Un campo magnético uniforme de 0,75 T atraviesa perpendicularmente el área de las espiras. Si el campo es desconectado y el mismo tarda en llegar a cero en 150 ms, calcula: **a)** La magnitud de la fem inducida en la bobina. **b)** La corriente inducida en ella.

Solución

a) La rapidez conque cambia el campo magnético, cuando llega a cero en un tiempo de 150 ms, es igual a la fem inducida en la bobina. A partir de la relación (11.4) se puede calcular la fem. El flujo magnético antes de desconectar el circuito que crea el campo es (relación 11.1 con $\theta = 0^\circ$):

$$\Delta \Phi_{mag} = \Delta AB$$

Como el área de la espira es $A = \pi r^2$ y ΔB es la disminución de flujo que experimenta la bobina cuando se desconecta el circuito, podemos escribir:

$$\varepsilon = -N \frac{\pi r^2 \Delta B}{\Delta t}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\varepsilon = -250 \frac{\pi(5 \cdot 10^{-2})(0,75)}{150 \cdot 10^{-3}} = -9,82 \text{ V}$$

b) La corriente inducida, se calcula de acuerdo con la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9,82}{15} = 0,65 \text{ A}$$

11.3 LEY DE LENZ

El signo de la relación (11.4), como puede verse, es negativo. Este signo está relacionado con la polaridad de la fem inducida en un circuito, generada por la variación del flujo magnético que atraviesa el área encerrada por dicho circuito. Esa variación puede ocurrir por varias causas, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

1. Por el aumento o disminución del campo magnético. Este sería el caso de un imán que se acerque o se aleje del circuito representado por la espira.
2. Por un movimiento del circuito frente a un campo magnético, sea que éste se acerque, se aleje o gire sobre sí mismo.
3. Por un aumento o disminución del área encerrada por el circuito.
4. Por una combinación de las variaciones mencionadas anteriormente.

En cualquiera de los casos mencionados, siempre aparecerá una fem inducida, dirigida a producir una corriente inducida que fluirá en el circuito en un sentido determinado. Dicho sentido depende del sentido del cambio del flujo magnético que pasa a través del circuito.

El físico alemán, Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) que vivía en Rusia y realizó investigaciones sobre el electromagnetismo en la misma

época de Faraday, publicó en el año de 1834 un enunciado de un principio físico general sobre el sentido de la fem inducida en un circuito. Hoy en día este principio se conoce como *ley de Lenz*. Dicha ley se expresa como sigue:

La polaridad de la fem inducida en un circuito es tal que la dirección de la corriente inducida generada crea un flujo magnético el cual se opone al cambio del flujo magnético que crea dicha fem.

La ley como puede verse, no hace referencia a ninguna forma de producción de la variación del flujo magnético que da origen a la fem. Esto se debe, sin dudas, a que existen varias formas de variar dicho flujo, tal como se mencionó anteriormente. Para entender el fundamento físico y la aplicación de la ley de Lenz, es preciso describir algunos ejemplos como los que se mencionan a continuación.

La fig. 11.4, muestra una espira fija y un imán tipo de barra, con su polo norte, acercándose a ésta.

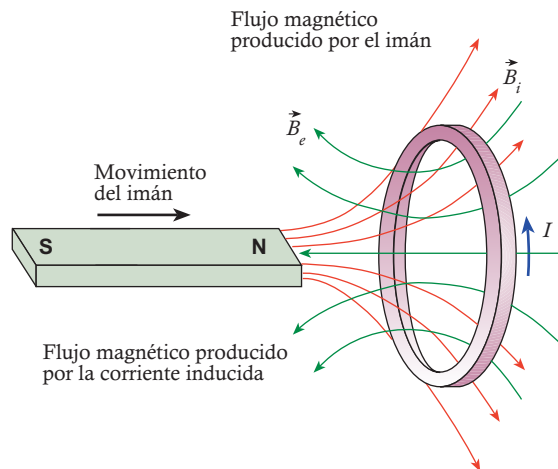


Fig. 11.4 Un imán de barra se acerca a una espira fija. A medida que el imán se mueve hacia la espira, el flujo magnético crece con el tiempo y se induce una fem que genera una corriente en la espira. Esta corriente produce un campo magnético, el cual da lugar a un flujo propio de la espira que se opone al aumento del flujo producido por el movimiento del imán.

El acercamiento del imán hace que el flujo magnético que atraviesa la espira aumente, induciendo en la misma una fem que, a su vez, hace

fluir una corriente en la misma. Según la ley de Lenz, la corriente inducida crea alrededor de la espira un campo magnético propio. La variación del flujo de este campo se opone a la variación del flujo inducido por el campo que se mueve hacia la espira. En otras palabras, en el centro de la espira se tiene un campo magnético que es el resultante de la diferencia entre el campo magnético creado por el imán y el campo magnético producido por la corriente inducida en la espira. Esto es:

$$\vec{B}_R = \vec{B}_i - \vec{B}_e$$

donde $\vec{B}_R$ es el campo resultante en el centro de la espira, $\vec{B}_i$ es el campo del imán en movimiento hacia la espira y $\vec{B}_e$ es el campo creado en la espira por la corriente inducida.

Para que el campo, $\vec{B}_e$, apunte en la dirección contraria a $\vec{B}_i$, la corriente inducida en la espira debe tener la dirección mostrada en la figura, lo cual puede comprobarse aplicando la regla de la mano derecha. Si se agarra la espira, abarcándola exteriormente con lo cuatro dedos de la mano, el dedo pulgar debe señalar la dirección del campo $\vec{B}_e$ oponiéndose al campo $\vec{B}_i$ y, para que esto ocurra, la dirección de la corriente inducida debe ser la mostrada, en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Como puede verse, el campo magnético inducido, $\vec{B}_e$, hace disminuir el flujo neto que atraviesa la espira.

Si el imán se mueve, alejándose de la espira, como se muestra en la fig. 11.5, el flujo magnético $\vec{B}_i$ que atraviesa la espira disminuye. Por lo tanto, aplicando de nuevo la ley de Lenz, la corriente inducida en la espira tendrá ahora sentido opuesto al caso anterior, de tal manera que produzca un campo magnético $\vec{B}_e$, cuyo flujo magnético, variable en el tiempo, se suma al cambio de flujo del campo $\vec{B}_i$ que se aleja.

Es de hacer notar que en los dos casos descritos anteriormente se puede obtener el mismo efecto si, en lugar del imán, se desplaza la espira.

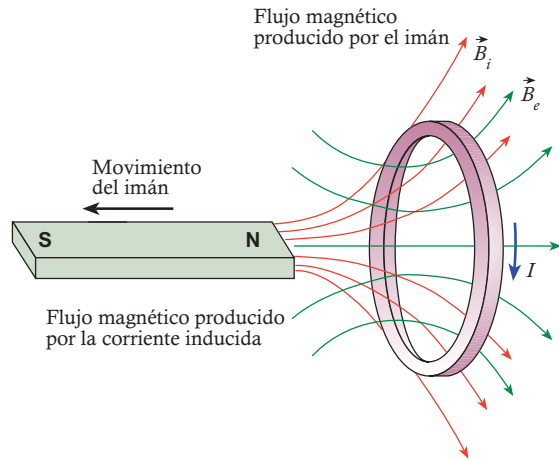


Fig. 11.5 Un imán de barra se aleja de una espira fija. A medida que el imán se aleja de la espira la espira, el flujo magnético disminuye con el tiempo y se induce una fem que genera una corriente en la espira. Esta corriente produce un campo magnético el cual da lugar a un flujo propio de la espira que se opone a la disminución del flujo producido por el alejamiento del imán.

Ejemplo 11.4

La fig. 11.6(a) muestra dos alambres conductores aislados, arrollados sobre un núcleo de madera. Los terminales *a* y *b*, del arrollamiento *A*, van conectados a una batería, a través de un interruptor, inversor de polaridad, mientras que los terminales *c* y *d* del arrollamiento *B*, van conectados a una resistencia *R* como se indica en la figura. Aplica la ley de Lenz para determinar si la corriente inducida en el arrollamiento *B*, fluye en la resistencia *R*, en la dirección de *c-d*, o en la dirección *d-c*, cuando se dan los siguientes casos: **a)** La corriente fluye en la dirección *a-b*, con su intensidad aumentando. **b)** La corriente fluye en la dirección *b-a*, disminuyendo. **c)** La corriente fluye en la dirección *b-a*, aumentando.

Solución

a) La fig. 11.9(b) muestra que cuando la corriente circula en la dirección *a-b*, aumentando, el flujo magnético creado por el campo variable alrededor del conductor, enlaza también el conductor del arrollamiento *B*, induciendo en éste una fem, y por lo tanto una corriente inducida. Según la ley de Lenz, la dirección de esta corriente debe ser tal, que su propio

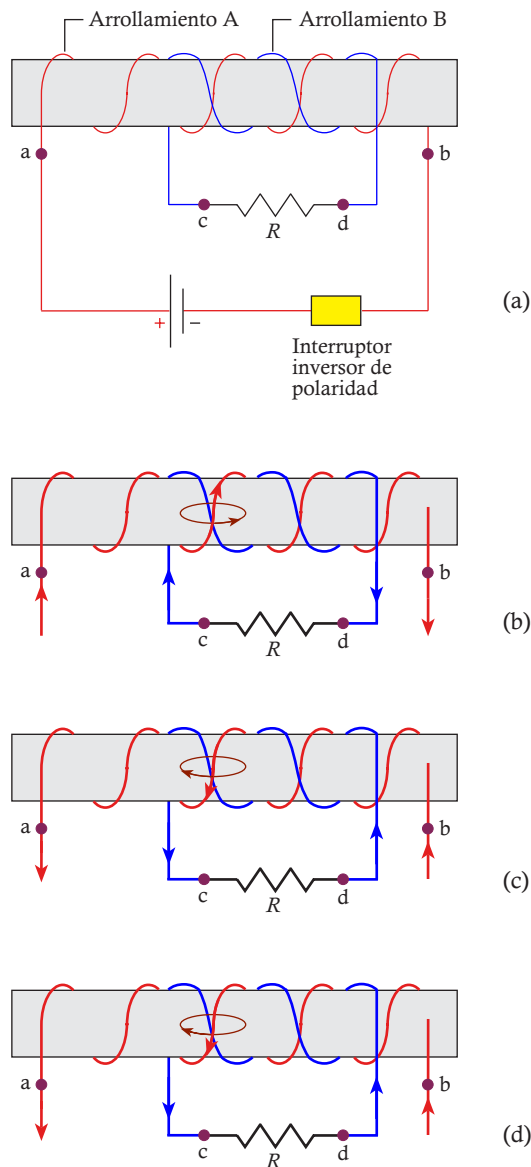


Fig. 11.6 Figuras para el ejemplo 11.4.

campo magnético variable también crea un flujo que se opone a la variación del flujo que la creó. Por lo tanto, la corriente inducida circula en la resistencia R , en la dirección $d-c$.

b) En la fig. 11.9(b) puede verse que cuando la corriente fluye en la dirección $b-a$, disminuyendo, la corriente inducida en la bobina B , circula en la resistencia en la dirección $d-c$, para oponerse, según la ley de Lenz, al cambio del flujo que la produce.

c) Como la corriente fluye como en (b), pero aumentando, la dirección de la corriente inducida circulará en la resistencia en la dirección $c-d$, para oponerse al cambio, según la fig. 11.9(c).

11.4 FEM DE MOVIMIENTO

Haciendo referencia a la fig 11.2, donde se muestra uno de los equipos utilizados por Faraday en sus experimentos, que lo llevaron a descubrir la fem inducida en un conductor, vemos que allí se utilizaron campos magnéticos variables con el tiempo, incidiendo sobre conductores fijos. Allí se mencionó que el mismo efecto de inducir una fem en un conductor se lograba manteniendo el campo magnético constante y se movía el conductor respecto al mismo.

La fig. 11.7 muestra un trozo de barra metálica de longitud l , la cual se desplaza perpendicularmente, con una velocidad $\vec{v}$, a un campo magnético uniforme $\vec{B}$, dirigido hacia el interior de la página.

La barra de metal contiene electrones libres, los cuales, debido al movimiento lateral de la barra, experimentan, por la interacción con el campo, la fuerza magnética dada por la relación $F = qvB$. Esa fuerza apunta hacia abajo, de acuerdo con la regla de la mano derecha. Con el movimiento de los electrones hacia abajo, se crea una carga negativa en el extremo inferior de la barra, dejando por consiguiente una carga positiva en el extremo superior. La separación de cargas da lugar a un campo eléctrico

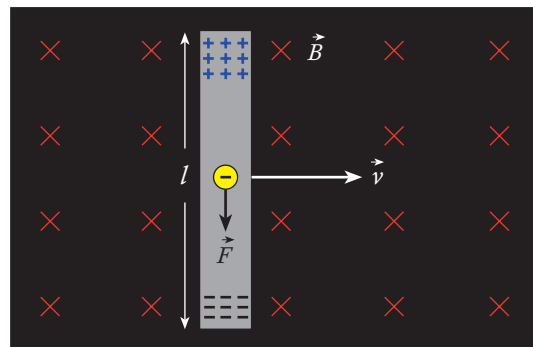


Fig. 11.7 La barra metálica, al moverse en un campo magnético, da lugar a un movimiento de electrones hacia la parte inferior de la misma. Como consecuencia, la parte superior de la barra queda con un exceso de carga positiva que origina un campo eléctrico entre sus extremos.

dentro de la barra, donde la fuerza eléctrica $F_e = qE$, ejercida por el campo sobre los electrones, está dirigida hacia arriba. El continuo movimiento lateral de la barra, hace que los electrones continúen moviéndose hacia abajo, hasta que la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ equilibre la fuerza magnética $\vec{F}_{mag}$. Cuando el equilibrio se logra, las magnitudes de estas fuerzas se hacen iguales:

$$F_{mag} = F_e = qvB = Eq \Rightarrow E = vB$$

Cuando se alcanza el equilibrio entre la fuerza eléctrica y la fuerza magnética, el campo eléctrico se hace constante, manteniendo una diferencia de potencial entre los extremos de la barra. Esta diferencia de potencial se puede escribir como:

$$\Delta V = El = Blv \quad (11.6)$$

De la relación (11.6), se deduce que cuando la barra se mueve dentro del campo magnético, se induce en ella una fem, como si a la barra se le hubiera aplicado una fuente externa, similar a una batería.

Esta fem inducida recibe el nombre de *fem de movimiento* y la misma se mantendrá mientras la barra se esté moviendo lateralmente dentro del campo magnético. De (11.6) se observa que la diferencia de potencial ΔV es igual a la magnitud de la fem inducida en la barra y de la figura se puede ver que el extremo superior de la barra se mantiene a un potencial mayor que el extremo inferior.

Supongamos ahora que una barra como la de la figura anterior, ubicada en el mismo campo magnético, se hace deslizar a una velocidad de magnitud v sobre dos conductores paralelos fijos, separados por una distancia l y conectados a una resistencia R , como se muestra en la fig. 11.8.

Debido al movimiento de la barra hacia la derecha, ocurre un incremento del área abarcada por el circuito, por lo que el flujo magnético que atraviesa esta área se incrementa, con lo cual se induce entonces una *fem* en dicho circuito. De acuerdo con la figura, el área dentro del circuito, en un momento dado es igual al producto Lx ; por lo tanto, el flujo magnético que atraviesa esta área viene dado según

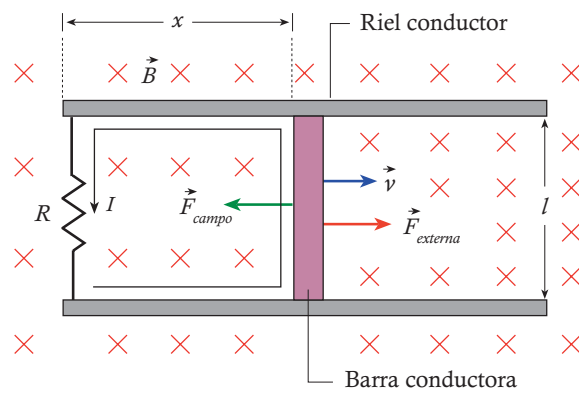


Fig. 11.8 Una barra metálica se desliza por dos rieles conductores a la velocidad de magnitud v , en un campo magnético uniforme que penetra en el papel. Al moverse la barra hacia la derecha, por la aplicación de la fuerza externa, se incrementa el flujo que la atraviesa, debido al incremento del área. Este incremento del flujo en el tiempo induce una fem en la barra y, por consiguiente, una corriente en la dirección indicada. A su vez, la corriente inducida en el circuito genera un flujo magnético propio con una dirección tal que sale de la página y se opone al cambio del flujo que la produce.

la relación (11.2) por:

$$\Phi_{mag} = BLx$$

Cuando la barra se mueve una distancia Δx hacia la derecha, el área encerrada por el circuito se incrementa en $\Delta A = L\Delta x$. Por consiguiente, el flujo magnético se incrementa en $\Delta\Phi_{mag} = BL\Delta x$.

De acuerdo con la ley de Faraday y, tomando en cuenta cómo varía el flujo, la fem inducida en el circuito se puede expresar como:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_{mag}}{\Delta t} = -Bl \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

pero $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$, por lo tanto:

$$\varepsilon = -Blv \quad (11.7)$$

Esta ecuación representa la fem inducida en un circuito, debido al movimiento de éste en un campo magnético. En otras palabras, es una fem inducida por movimiento.

La corriente inducida por esta fem, según la ley de Lenz, será en sentido de las manecillas del reloj, para que genere un flujo magnético que salga de la página, y el cual se oponga al cambio del flujo magnético que entra en la página. En este caso, el cambio del flujo magnético entrante a la página se debe al movimiento de la barra hacia la derecha

La magnitud de la corriente inducida impulsada por la fem viene dada, según la ley de ohm, por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (11.8)$$

Al circular la corriente inducida por el circuito, sobre la barra se ejerce la fuerza magnética cuya magnitud viene dada por $F_{mag} = ILB \sin \theta$. Por ser $\theta = 90^\circ$, $F_{mag} = ILB$. La dirección de esta fuerza, de acuerdo con la regla de la mano derecha, es hacia la izquierda y la misma se opone a la fuerza $F_{externa}$, aplicada para mover la barra, como se muestra en la fig. 11.8. Si la barra se desplaza a velocidad constante, F_{mag} y $F_{externa}$ deben ser iguales y opuestas. Por tanto:

$$F_{mag} = F_{externa} \Rightarrow F_{externa} = ILB \quad (11.9)$$

Si en la relación anterior sustituimos la corriente dada por (11.8), se tiene:

$$F_{externa} = ILB = \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad (11.10)$$

La fuerza $F_{externa}$ deberá suministrar una potencia a la barra para moverla, venciendo la fuerza F_{mag} . Dicha potencia es igual a:

$$P_{externa} = F_{externa} \cdot v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \quad (11.11)$$

Si se sustituye en esta ecuación, la expresión de la fem de (11.7) se tiene otra forma de la potencia aplicada para mover la barra:

$$P_{externa} = \frac{\varepsilon^2}{R} \quad (11.12)$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, esta potencia debe ser igual a la potencia disipada en la resistencia en forma de calor, la cual viene

expresada por $P_R = RI^2$. Sustituyendo I de la relación (11.8), se tiene:

$$P_R = RI^2 = R \left(\frac{Blv}{R} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{R} \quad (11.13)$$

Lo cual comprueba el cumplimiento del principio de la conservación de la energía, como era de esperarse.

Ejemplo 11.5

Un alambre conductor de longitud l se desliza a velocidad constante por otro conductor en forma de U, como se muestra en la fig 11.9. El conjunto se encuentra en un campo magnético uniforme y perpendicular a éste, de magnitud 0,75 T. Un bombillo con capacidad de 10 W de potencia y que demanda una corriente de 350 mA, está conectado en el conductor en U, como lo indica la figura. Si el conductor deslizante se mueve con una velocidad constante de 3,75 m/s, calcula su longitud para que la fem inducida en el circuito, pueda suministrar la corriente necesaria al bombillo, de tal manera que éste pueda entregar la iluminación, de acuerdo a las características de su potencia de diseño de 10 W.

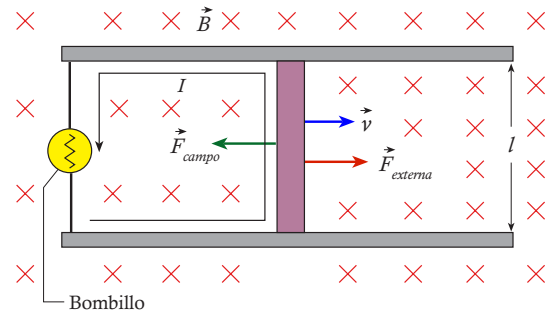


Fig. 11.9 Ejemplo 11.5.

Solución

De la relación (11.7), la magnitud de la fem inducida viene dada por:

$$\varepsilon = Blv$$

De aquí se obtiene

$$l = \frac{\varepsilon}{Bv}$$

Ahora bien, de la potencia del bombillo podemos

obtener la fem:

$$P = \varepsilon I \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{P}{I}$$

Sustituyendo esta expresión en la relación anterior:

$$l = \frac{\varepsilon}{Bv} = \frac{P}{BvI}$$

Al sustituir valores, se obtiene la longitud requerida del conductor deslizante:

$$l = \frac{10}{0,75 \cdot 3,75 \cdot (35 \cdot 10^{-2})} = 10,16 \text{ m}$$

11.5 CAMPO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO INDUCIDOS

En la sección 11.4, referida a la fem de movimiento, se dijo que cuando se tiene un campo magnético uniforme y sobre este se desplaza lateralmente una barra de metal, los electrones libres que contiene, son sometidos a la fuerza magnética dada por $F_{mag} = qvB$, la cual desplaza las cargas negativas en la dirección indicada por la regla de la mano derecha. Considérese el caso contrario; es decir, supongamos que se tiene una bobina fija y sin ningún movimiento en su forma y orientación, ubicada en un espacio donde existe un campo magnético. Si el campo se hace variar, se creará un flujo magnético variable con el tiempo, el cual creará una fem inducida en la bobina. Esta fem, como sabemos, viene dada por la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi_{mag}}{\Delta t}$$

Al existir una fem en la bobina, se producirá en ésta una corriente, si el circuito está cerrado. Uno puede preguntarse, en este momento, ¿qué fuerza mueve las cargas que constituyen la corriente inducida? Si se toma en cuenta que, antes de que ocurra la inducción, la velocidad de las cargas dentro del circuito de la bobina es, en promedio, cero, la carga, constituida por electrones, se puede considerar estática y sobre la misma no podrá ejercerse ninguna fuerza magnética ya que, como es sabido, un campo magnético no ejerce fuerza sobre una carga en reposo. Sin embargo, en este

caso se produce una corriente a partir del reposo de las cargas eléctricas. Es importante recordar entonces, que la única fuerza que puede iniciar el movimiento de una carga, partiendo del reposo, es la *fuerza eléctrica originada en un campo eléctrico*. Por lo tanto, es forzoso concluir que el flujo magnético variable, a través de una bobina, induce en ésta un campo eléctrico. Dicho campo recibe el nombre de *campo eléctrico inducido*, el cual ejerce fuerzas sobre los electrones libres del circuito, produciendo una corriente eléctrica. La dirección de este campo eléctrico sigue la misma dirección de la corriente inducida y, por tanto, siempre será tangente a la circunferencia de cada espira de la bobina.

Este campo, constituye un nuevo campo eléctrico, diferente al campo eléctrico electrostático estudiado cuando se trató el campo producido por una carga eléctrica puntual en el espacio.

Tres características distinguen al campo eléctrico inducido del campo electrostático:

1. Las líneas del campo electrostático se inician en una carga positiva y terminan en una carga negativa. Es decir, dichas líneas no forman trayectorias cerradas, en cambio las líneas del campo eléctrico inducido forman trayectorias cerradas, al igual que las líneas del campo magnético.
2. El campo eléctrico estático es conservativo, es decir siempre está presente alrededor de una carga eléctrica, en cambio el campo eléctrico inducido es un campo no conservativo, ya que el mismo está presente mientras el campo magnético esté variando con el tiempo.
3. El campo eléctrico estático, generado por una carga eléctrica, es constante en un punto determinado del espacio. En cambio, el campo eléctrico inducido es variable con el tiempo en cualquier punto del espacio donde exista un campo magnético que varíe con el tiempo.

Para ilustrar lo descrito, consideremos una espira de radio r situada en un campo magnético uniforme que penetra en el plano de la página y perpendicular al plano de la espira, como se muestra en la fig. 11.10.

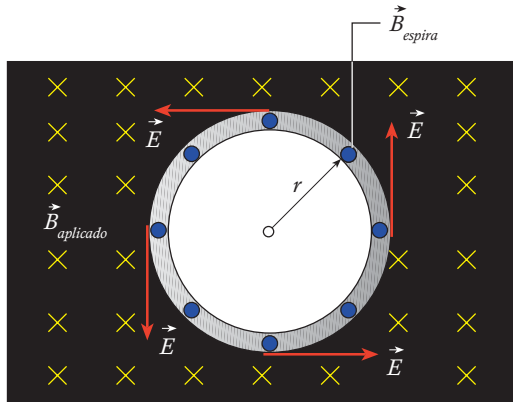


Fig. 11.10 La espira conductora de radio r se encuentra situada en un campo magnético externo ($\vec{B}_{\text{aplicado}}$) que entra en el plano de la página y el cual es perpendicular al área de la espira. Si el flujo magnético externo varía con el tiempo, se produce en la espira un campo eléctrico inducido ($\vec{E}$), tangente a la misma y cuya dirección es tal que da lugar a un campo magnético ($\vec{B}_{\text{espira}}$), cuyo flujo se opone al cambio del flujo aplicado.

Si se hace variar el campo magnético, según la ley de Faraday se induce una fem, la cual viene dada por $\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi_{\text{mag}}}{\Delta t}$. La presencia de esta fem, implica la presencia de un campo eléctrico inducido, $\vec{E}$, el cual sigue la dirección de la corriente inducida y es tangente a la espira en todos los puntos de su trayectoria. Ahora bien, recordando lo estudiado en electrostática, el trabajo para mover una carga q a lo largo de la trayectoria de la espira viene dado por:

$$W = q\varepsilon \quad (11.14)$$

También se puede expresar este trabajo en función de la fuerza eléctrica generada por el campo eléctrico, para mover la carga a través de la longitud circular de la espira:

$$W = F_e x$$

donde:

$$F_e = qE_{\text{inducido}} = qE \quad x = 2\pi r$$

Por lo tanto:

$$W = 2\pi r q E \quad (11.15)$$

Igualando las relaciones (11.14) y (11.15) se tiene:

$$2\pi r q E = q\varepsilon$$

Finalmente:

$$E_{\text{inducido}} = E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} \quad (11.16)$$

A partir de las relaciones:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi_{\text{mag}}}{\Delta t} \quad \Delta \Phi_{\text{mag}} = A \cdot \Delta B$$

se puede obtener otra expresión del campo eléctrico inducido:

$$E_{\text{inducido}} = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta \Phi_{\text{mag}}}{\Delta t} = -\frac{A \cdot \Delta B}{2\pi r \Delta t}$$

Pero el área de la espira es $A = \pi r^2$ y, por tanto:

$$E_{\text{inducido}} = -\frac{A \cdot \Delta B}{2\pi r \Delta t} = -\frac{\pi r^2 \cdot \Delta B}{2\pi r \cdot \Delta t}$$

$$E_{\text{inducido}} = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (11.17)$$

La existencia de un campo eléctrico inducido, no implica siempre la presencia material de un conductor. Cuando en una región del espacio existe un campo magnético variable en el tiempo, siempre aparece un campo eléctrico inducido, bien en un conductor, si está presente, o bien en ausencia de éste. Se mantiene, simplemente, en el espacio, mientras el campo magnético esté variando.

El proceso recíproco a lo explicado es también una verdad física. Un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético $\vec{B}$ variable también en el tiempo. Recuerda que una carga eléctrica en movimiento crea a su alrededor un campo magnético y si, esta varía en el tiempo, el campo magnético a su alrededor también variará, igualmente, en el tiempo.

De todo lo expuesto sobre el fenómeno del electromagnetismo, es decir, del fenómeno de la interacción entre el campo magnético y la electricidad en movimiento, parece importante sacar en claro dos cuestiones bien importantes:

1. En el capítulo 8 se estudiaron las interacciones, del campo magnético uniforme, con cargas eléctricas en movimiento. Dentro del conjunto de casos estudiados, tiene importancia relevante, el caso de la fuerza mag-

nética ejercida sobre un conductor por el que circula una corriente y que se encuentra en un campo magnético uniforme. El descubrimiento de este fenómeno de la naturaleza, que de por sí es un hecho de suma importancia en el conocimiento del mundo físico que nos rodea, ha sido aprovechado por la tecnología, para construir máquinas rotativas llamadas generadores y motores eléctricos, las cuales tienen diversos usos y aplicaciones decisivas en el desarrollo moderno de la industria y, por ende, en el desarrollo de la vida de las naciones

2. Para que circule una corriente por un conductor, es indispensable aplicar al mismo una diferencia de potencial, a través de un campo eléctrico inducido, como se ha visto. Por otra parte, para producir esa diferencia de potencial se requiere suministrar al ente que la produce, *el generador de corriente eléctrica*, una potencia mecánica, expresada como $P_m = F \cdot v$. En términos prácticos, lo que ocurre es lo siguiente: cuando un conductor, como el mencionado antes, está en un campo magnético uniforme, se inducirá en él una corriente, al ser movido por una fuerza externa aplicada. Esto genera automáticamente una fuerza lateral sobre el conductor, que es contraria a la fuerza aplicada. Para que se mantenga el movimiento, es necesario que la fuerza externa venza continuamente esta fuerza lateral, con lo cual se pueda mantener también la corriente inducida. Si el conductor es una espira cerrada y la misma puede rotar alrededor de un eje que pase por su centro, se puede obtener una corriente eléctrica circulando en forma permanente, mientras le estemos aplicando potencia mecánica a la espira para hacerla girar. En este proceso de mover la espira e inducirse en ella una fem y, por consiguiente, una corriente, ocurre una transformación muy importante de la energía. Se suministra energía mecánica a la espira para moverla y se induce en ésta una fem que genera una energía eléctrica, representada por la capacidad de producir calor en un horno eléctrico, mover motores eléctricos, producir luz, etc. Lo inverso también es cierto. Al suministrar una corriente eléctrica a un motor, se pueden realizar trabajos mecánicos, como mover ejes de bombas que manejan caudales de agua, compresores de aire comprimido, ventiladores, mover cintas transportadoras, etc. En este caso, se suministra energía eléctrica a una máquina y se recibe energía mecánica. En estos procesos ocurre siempre una transformación de la energía. Se recibe energía de una

forma y se entrega energía de otra forma, todo según el inviolable principio de la conservación de la energía.

Ejemplo 11.6

La fig. 11.11 muestra un anillo de radio 15 cm, en un campo magnético dirigido hacia el plano de la página. La magnitud del campo magnético es de 0,75 T y el mismo decrece a la tasa de 0,2 T/s. **a)** Calcula la magnitud del campo eléctrico inducido e indica su dirección en cualquier punto del anillo. **b)** Calcula la fem inducida en el anillo. **c)** Si el anillo tiene una resistencia de 3 Ω , calcula la corriente que fluye por él. **d)** ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera del anillo? **e)** Si el anillo es cortado en un punto y se separan ligeramente los extremos, calcula la diferencia de potencial entre dichos extremos.

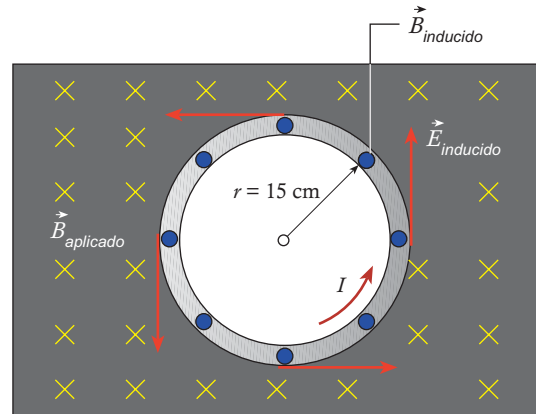


Fig. 11.11 Ejemplo 11.6.

a) El campo eléctrico inducido se calcula mediante la relación (11.17):

$$E_{\text{inducido}} = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{15 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot (-0,2) = 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

b) A partir de (11.16) se calcula la fem inducida en el anillo:

$$\varepsilon = 2\pi r E_{\text{inducido}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 14,14 \text{ mV}$$

c) La corriente en el anillo viene dada por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{14,14}{3} = 4,71 \text{ mA}$$

d) Recuerda que en un campo eléctrico inducido, las líneas del campo son cerradas, lo cual es diferente a lo que ocurre en un campo eléctrico electrostático, donde sus líneas se inician en una carga puntual positiva y terminan en una carga puntual negativa, en consecuencia, en un campo eléctrico inducido en un circuito no aplica el concepto de diferencia de potencial. Por lo tanto, la respuesta al problema es que la diferencia de potencial en cualquier punto del anillo es cero.

e) La diferencia de potencial se calcula a partir (11.6):

$$\Delta V = E_{\text{inducido}} \cdot l = E_{\text{inducido}} \cdot 2\pi r$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$\Delta V = (1,5 \cdot 10^{-2})(2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-2}) = 14,14 \text{ mV}$$

11.6 AUTOINDUCCIÓN

Haciendo referencia a la fig. 11.2, que representa uno de los dispositivos utilizados por Faraday en sus experimentos sobre la inducción electromagnética, recordemos que se inducía una fem en la bobina secundaria cuando se cerraba o abría el interruptor en la bobina primaria, lo cual es debido a que la corriente no adquiere su valor máximo o su valor cero en forma instantánea, pues para llegar a estos valores se tarda un cierto tiempo, en el cual el flujo magnético cambia. Ese cambio abrazaba también la bobina secundaria, creando una fem en ésta.

No necesariamente se requiere de una bobina secundaria para poner de manifiesto la inducción electromagnética. En cualquier circuito eléctrico por el que circule una corriente se induce una fem, si dicha corriente varía con el tiempo. Sea el circuito mostrado en la fig. 11.15, constituido por una resistencia, una batería que genera una fem que impulsa la corriente I y un interruptor. Al momento de cerrar el interruptor, la corriente no adquiere su valor final, en forma instantánea, según se podría deducir de la ley de Ohm, sino que la misma crece con el tiempo, hasta adquirir su valor estable. Mientras la corriente está creciendo, el campo magnético que rodea el conductor también está creciendo y, por consiguiente, el flujo magnético. De acuerdo con la ley de Faraday, esta variación del

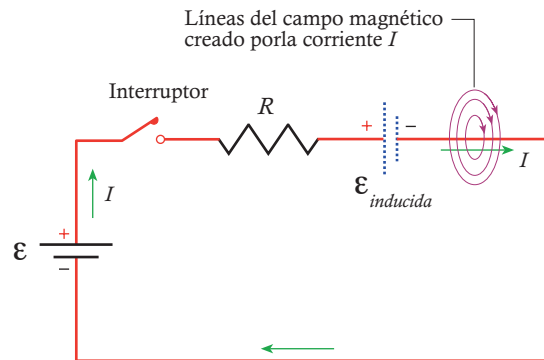


Fig. 11.12 Una vez que se cierra el interruptor, la corriente no alcanza su valor máximo instantáneamente. Como consecuencia, la variación de la corriente, desde su valor cero hasta su valor estable, crea un campo magnético y un flujo que también varía con el tiempo. La variación del flujo induce una fem, $\varepsilon_{\text{inducida}}$, (representada por la línea interrumpida) que se opone a la fem de la batería y la cual crea un flujo que se opone al cambio de flujo inicial.

flujo magnético induce una fem en el circuito y, según la ley de Lenz, dicha fem será opuesta a la fem de la batería, porque la misma se debe oponer a la causa que la origina, que es el cambio del flujo magnético producido al cerrar el circuito. Esta oposición de la fem inducida a la fem de la batería explica por qué la corriente no adquiere su valor máximo instantáneamente, al cerrar el interruptor.

Este proceso de inducción, recibe el nombre de *autoinducción*, debido a que dicha inducción no proviene de otro circuito, sino que es generada en el mismo circuito. La fem inducida en un proceso como el indicado, recibe el nombre de *fem autoinducida* y también se le conoce como *fuerza contraelectromotriz*, o *fem inversa*.

Cuando se abre el interruptor de la misma figura, se cumplen también las leyes de Faraday y de Lenz. Se generará una fem inducida, en el mismo sentido de la fem de la batería, para oponerse a la causa que produce esta fem inducida, que es la variación del flujo magnético producido por la corriente que tiende a cero.

En conclusión, podemos decir que la *autoinducción retarda*, bien sea el aumento o la disminución de la corriente en un circuito.

Este fenómeno de la naturaleza, está presente en todos

los aparatos eléctricos producidos por la técnica moderna, los cuales en su mayoría usan corrientes alternas, cuyas magnitudes varían con el tiempo.

11.7 INDUCTANCIA

El procedimiento para evaluar cuantitativamente la autoinducción, a fin de cuantificar cómo la fem inducida en el circuito depende de la variación de la corriente impulsada por una fuente como la batería, debe tener presente que el campo magnético creado alrededor del conductor por la corriente es proporcional a esta corriente, según la ley de Biot-Savart, relación (10.1) y, también, que el flujo magnético que atraviesa el circuito es proporcional al campo, según la relación (11.2). Por lo tanto, se deduce que el flujo magnético es proporcional a la corriente que circula por el circuito. Esta proporcionalidad se puede expresar como:

$$\Phi_{mag} = LI \quad (11.18)$$

donde L , que es la constante de proporcionalidad, se denomina *autoinductancia* del circuito, o como normalmente se le conoce, *inductancia* del circuito. La inductancia L depende de la forma geométrica del circuito. Despejando L de esta ecuación se tiene:

$$L = \frac{\Phi_{mag}}{I} \quad (11.19)$$

La unidad de inductancia en el SI es el *henrio* (H) en honor al físico norteamericano Joseph Henry (1797-1878), quien en 1832 fuera el descubridor de la autoinducción electromagnética.

De acuerdo con la (11.14) se tiene:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}}$$

Cuando la corriente I , que circula por el circuito varía, el campo magnético a su alrededor cambia, con lo cual el flujo asociado también cambia, induciendo una fem autoinducida en el circuito, como se explicó antes. De acuerdo con la relación (11.13), esto se expresa como:

$$\frac{\Delta\Phi_{mag}}{\Delta t} = \frac{\Delta(LI)}{\Delta t}$$

Pero, como L es una constante:

$$\frac{\Delta\Phi_{mag}}{\Delta t} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Por la ley de Faraday, podemos darnos cuenta que la fem autoinducida es igual a:

$$\varepsilon_{autoinducción} = -\frac{\Delta\Phi_{mag}}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (11.20)$$

Lo que indica que la fem autoinducida es proporcional a la variación de la corriente con relación al tiempo. Una bobina o un solenoide poseen muchas espiras, por lo que tienen una autoinducción muy grande. Por lo tanto, grande también será su inductancia. Así, la fem autoinducida en una bobina de N espiras será:

$$\varepsilon_{autoinducción} = -N \frac{\Delta\Phi_{mag}}{\Delta t} = -NL \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (11.21)$$

A las bobinas, por tener una inductancia grande, se les denomina *inductores* o *reactores* y los mismos cumplen importantes funciones en equipos de uso cotidiano en el hogar, como computadoras, radios, etc y de uso industrial, en controles de distribución de potencia en las centrales de generación de electricidad. Así, por ejemplo, un inductor se utiliza a menudo, para separar corrientes alternas de corrientes directas, pues debido a la inductancia del inductor y a la frecuencia de la corriente alterna, el circuito presenta una alta impedancia a estas corrientes, no así a las corrientes directas, para las cuales la impedancia es prácticamente cero, con lo cual las mismas pueden circular libremente por el circuito. En la práctica, un inductor es una bobina de conductor aislado, devanada sobre un tubo hueco, donde éste, según convenga al objetivo para el cual se va a aplicar a un circuito, puede estar libre o relleno con un material ferromagnético.

La gama de valores de la inductancia es muy amplia, por ejemplo, en equipos de radio o televisión son comunes los valores en microhenrios (μH); en cambio, en inductores destinados a limitar las corrientes de cortocircuito, en sistemas de generación de grandes potencias eléctricas, los valores de tales inductores oscilan en varios henrios. El símbolo

eléctrico de un inductor de aire es  y con núcleo de un material ferromagnético es . En un circuito real, donde existen conductores, resistencias, condensadores y bobinas, siempre se supone que la inductancia se concentra en los inductores, o sea las bobinas. Sin embargo se debe tener presente que, aparte de las bobinas, el resto de los componentes de un circuito, siempre tiene alguna inductancia, de forma que si no existieran bobinas, la inductancia presente puede llegar a afectar el comportamiento de tal circuito.

Ejemplo 11.7

En un solenoide constituido por 750 espiras circula una corriente de 4,75 A, la cual produce en su interior un flujo magnético de magnitud 3,5 mWb. Calcula la inductancia del solenoide.

Solución

A partir de (11.19) se obtiene la respuesta al problema planteado:

$$L = N \frac{\Phi_{mag}}{I} = 750 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{4,74} = 0,55 \text{ H}$$

Ejemplo 11.8

La inductancia de una bobina es de 4.5 mH. Por dicha bobina fluye una corriente que cambia de 0,125 A a 0,75 A en 0,15 s. Calcula la fem autoinducida en la bobina durante este tiempo.

Solución

Aplicando (11.20) se obtiene la magnitud de la fem. El resultado es:

$$\varepsilon_{autoinducción} = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{0,625}{0,15} = 0,019 \text{ V}$$

11.8 INDUCTANCIA MUTUA

Como se ha explicado en las secciones precedentes, cuando una bobina de un circuito es atravesada por un campo magnético variable con el tiempo, se induce en ella una fem autoinducida $\varepsilon = -NL \frac{\Delta I}{\Delta t}$. Como el campo magnético se extiende también por el exterior de la bobina, el mismo puede incidir sobre otra que se encuentre cerca, induciendo una fem en esta última.

Supongamos que se tienen dos bobinas de hilo conductor, con vueltas bien juntas, como se muestra en la fig. 11.13.

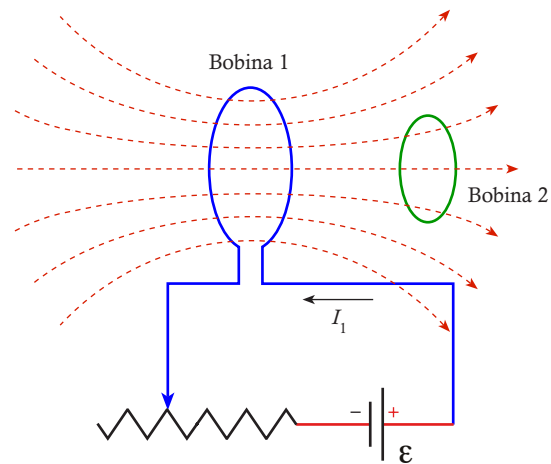


Fig. 11.13 Cuando se hace variar la corriente en la bobina 1, a través de la resistencia variable, se crea un flujo magnético variable con el tiempo, parte del cual atraviesa la bobina 2 e induce en ella una fem.

La bobina 1, constituida por N_1 vueltas, está conectada a una batería en serie con una resistencia variable, con la que se puede cambiar, a voluntad, la intensidad de la corriente que fluye por la bobina 1.

La bobina 2, con N_2 vueltas, es un circuito cerrado sin fuente de alimentación propia, como puede verse en la figura. Cuando la batería da lugar a una corriente I_1 , ésta crea un campo magnético, proporcional a esta corriente. Si dicho campo magnético se hace variar, aumentando o disminuyendo la corriente a través de la resistencia variable, se crea un flujo variable con el tiempo. Una parte de este flujo, también proporcional a la corriente I_1 , atravesará el área de la bobina 2. Dicho

flujo se representa por Φ_{12} , donde el subíndice indica el flujo de la bobina 1, debido a la corriente I_1 que enlaza a la bobina 2, y el mismo se expresa como

$$\Phi_{12} = \frac{M_{12} I_1}{N_2} \quad (11.22)$$

donde M_{12} es una constante de proporcionalidad semejante a la constante L . Si de despeja M_{12} de la relación (11.16), se tiene:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (11.23)$$

relación en la cual se puede ver que esta constante M_{12} representa la parte del flujo magnético del circuito 1, que enlaza el circuito 2. Dicha constante recibe el nombre de *coeficiente de inducción mutua* o *inductancia mutua*, como normalmente se le denomina. En forma idéntica, si una corriente I_2 tiene su origen en la bobina 2 y parte de su flujo magnético enlaza a la bobina 1, este flujo será proporcional a la corriente I_2 y, por lo tanto:

$$\Phi_{21} = \frac{M_{21} I_2}{N_1} \quad (11.24)$$

$$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} \quad (11.25)$$

Cuando la corriente en la bobina 1 varía con el tiempo, por la ley de Faraday, se induce una fem en la bobina 2, la cual viene dada por:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{\Delta \Phi_{12}}{\Delta t} = -N_2 \frac{\Delta \left(\frac{M_{12} I_1}{N_2} \right)}{\Delta t}$$

Simplificando, se obtiene:

$$\varepsilon_2 = -M_{12} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad (11.26)$$

Similarmente, si por la bobina 2 circula una corriente I_2 , variable con el tiempo, ésta inducirá una fem en la bobina 1 que se expresa como:

$$\varepsilon_1 = -M_{21} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \quad (11.27)$$

Se puede demostrar, que los coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} son iguales, por lo tanto (11.26) y (11.27) se pueden escribir en la forma:

$$\varepsilon_1 = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \quad \varepsilon_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad (11.28)$$

Si de cualquiera de las ecuaciones anteriores se despeja M , se tiene:

$$M = -\frac{\varepsilon_1}{\Delta I_2 / \Delta t} = -\frac{\varepsilon_2}{\Delta I_1 / \Delta t} \quad (11.29)$$

La unidad de inductancia mutua en el SI es el henrio (H) y, como puede verse, de la ecuación anterior

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

La ecuaciones descritas antes, son de aplicación general, para cualquier par de componentes de un circuito. De tal manera que si por un circuito fluye una corriente que es variable con el tiempo, dicha corriente inducirá una fem en otro componente cercano y viceversa.

Ejemplo 11.8

La inductancia mutua entre dos bobinas que se encuentran cerca una de otra es de 275 mH. Si la corriente I_1 que circula por la bobina 1 varía 37 a 54 mA en 18 ms y la corriente I_2 de la bobina 2 varía de 38 a 58 mA en el mismo intervalo de tiempo, calcula la magnitud de la fem inducida en la bobina 1 por la corriente variable de la bobina 2 y viceversa.

Solución

Se usará la relación (11.28) para calcular cada una de las fem planteadas en el problema. Así, la fem inducida en la bobina 2, por la variación de la corriente en la bobina 1 es:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 275 \cdot 10^{-3} \frac{(54 - 37) \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3}} = 0,26 \text{ V}$$

y la fem inducida en la bobina 1 por la variación de la corriente en la bobina 2 es:

$$\varepsilon_1 = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 275 \cdot 10^{-3} \frac{(58 - 38) \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3}} = 0,31 \text{ V}$$

11.9 MÁQUINAS ELÉCTRICAS: GENERADORES Y MOTORES

Los generadores y motores son máquinas eléctricas rotatorias, las cuales funcionan bajo los mismos principios del electromagnetismo. Los generadores y motores eléctricos son, en esencia, *máquinas recíprocas*, pues los generadores convierten la energía mecánica en energía eléctrica, mientras que los motores convierten la energía eléctrica en energía mecánica. El primer generador del mundo fue creado por M. Faraday, en el año de 1831. Era un generador de corriente directa, ya que la corriente que producía circulaba en una sola dirección.

11.9.1 El generador de corriente alterna

La fig. 11.14 muestra las partes básicas de un generador simple de corriente alterna. Una espira, que puede tener N vueltas, rota en un campo magnético uniforme, impulsada desde el exterior, por una fuerza proveniente de una fuente de energía. Dicha fuente de energía puede ser entre otras, la energía hidráulica, producida por la caída de agua almacenada en una represa,

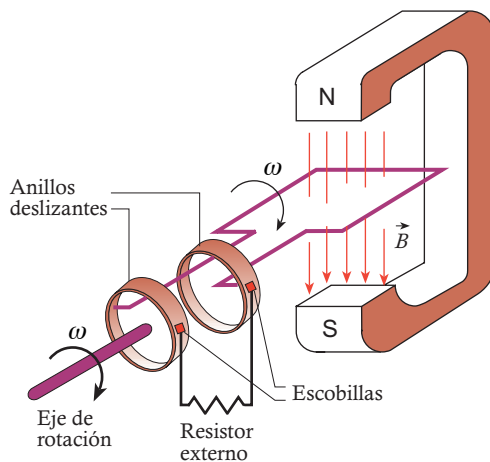


Fig. 11.14 Esquema de un generador sencillo de corriente alterna. Si una espira rota en un campo magnético uniforme, se induce una fem en la misma, produciéndose un voltaje que invierte su polaridad cada vez que la espira gire 180° .

que al dar sobre los álabes de una turbina acoplada a la espira, produce el movimiento rotatorio de ésta; también el movimiento de rotación se puede lograr a través del vapor de agua producido en calderas que, aplicado a determinadas presiones sobre los álabes de la turbina, produce el movimiento de rotación de la espira. Las N vueltas de la espira están devanadas en una especie de tambor de acero, el cual recibe el nombre de *armadura*, al que se le conoce también como *rotor*, porque rota por la aplicación de una energía externa. Al conjunto de piezas polares, constituidas por electroimanes, que suministran el campo magnético uniforme recibe el nombre de *estator*, pues todos sus componentes permanecen inmóviles. Los extremos de la espira, como puede verse en la figura, van conectados a *anillos deslizantes*, que rotan conjuntamente con la espira y sobre estos anillos deslizan *escobillas de grafito*, encargadas de realizar la conexión eléctrica de la armadura con un circuito externo (en la figura un resistor), por donde pueda fluir la corriente eléctrica producida por la fem inducida durante el movimiento del rotor a través del campo magnético uniforme.

Cuando la espira inicia su movimiento de rotación, el flujo magnético que atraviesa el área encerrada por ésta cambia con el tiempo, generando, de acuerdo con la ley de Faraday, una fem inducida y, por lo tanto, una corriente en el circuito conformado por la espira, anillos deslizantes, escobillas y el resistor externo.

Puede demostrarse que si una espira de N vueltas y área A gira a una velocidad angular ω la fuerza electromotriz inducida en sus terminales es:

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t \quad (11.30)$$

Como $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia angular de rotación, la relación anterior puede escribirse como:

$$\varepsilon = NBA\omega \sin 2\pi ft \quad (11.31)$$

La frecuencia comercial producida por las centrales de generación eléctrica en nuestro país es de 60 ciclos /s, o 60 Hz, como también se le denomina. La relación (11.31) expresa el valor instantáneo de la fem inducida en la espira.

De acuerdo con (11.31), la fem inducida en la espira varía en forma sinusoidal con el tiempo, tal como se

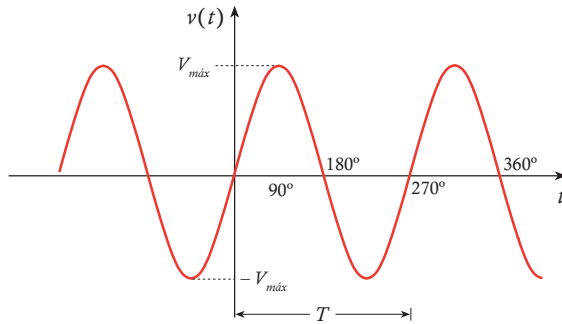


Fig. 11.15 Onda sinusoidal inducida en una espira que gira en un campo magnético uniforme.

muestra en la fig. 11.15. También, se puede notar que la fem tendrá un valor máximo cuando el ángulo $2\pi ft = 90^\circ$ o $2\pi ft = 270^\circ$. En este caso, la fem inducida viene expresada como:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = NBA\omega \quad (11.32)$$

Y la relación (11.31) puede tomar la forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{máx}} \sin 2\pi ft \quad (11.33)$$

Cuando el ángulo $2\pi ft = 0^\circ$ o $2\pi ft = 180^\circ$, la fem inducida será cero, puesto que $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$.

Como el voltaje senoidal inducido en la bobina genera en ésta una corriente, por la ley de Ohm, dicha corriente varía también sinusoidalmente y su expresión, en base a la relación (11.32) es:

$$I = I_{\text{máx}} \sin 2\pi ft \quad (11.34)$$

Los generadores que producen las enormes cantidades de energía eléctrica para alimentar las cargas de alumbrado y artefactos domésticos, así como las cargas de motores eléctricos de los complejos industriales de una gran ciudad, son mucho más complicados, pues debido a la importancia que reviste la seguridad de su funcionamiento y suministro de corriente, para el desenvolvimiento en general de la vida de las personas, implica el uso de sofisticados controles, así como el diseño de máquinas con el más acabado rendimiento y seguridad en la operación y suministro de energía. No obstante, tales máquinas, no importando la complejidad de las mismas, funcionan sobre los principios del electromagnetismo expuestos anteriormente.

Ejemplo 11.9

El rotor de un generador simple tiene una bobina de 50 espiras de conductor aislado, con una resistencia total de 15 ohm. El área de cada espira es de $0,10 \text{ m}^2$. La frecuencia de giro del rotor es de 60 Hz y el mismo rota en un campo magnético de magnitud $0,4 \text{ T}$. Calcula: **a)** La fem máxima inducida en la bobina. **b)** La corriente máxima si la salida del generador está conectada a una resistencia de carga relativamente pequeña. **c)** Expresa las ecuaciones del voltaje y corriente alternos en función de los resultados obtenidos en los puntos (a) y (b).

Solución

a) La fem máxima se calcula mediante (11.31). En esta ecuación la velocidad angular es $2\pi f$ donde f es la frecuencia de giro del rotor (60 Hz). Sustituyendo valores en la ecuación, se tiene:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = NBA\omega = 50 \cdot 0,4 \cdot 0,10 \cdot (2\pi \cdot 60) = 753,98 \text{ V}$$

b) La corriente máxima se calcula a partir de la fem máxima calculada y la ley de Ohm:

$$I_{\text{máx}} = \frac{753,98}{15} = 50,27 \text{ A}$$

c) Las ecuaciones del voltaje y de la corriente se expresan como:

$$\varepsilon = 753,98 \sin 377t$$

$$I = 50,27 \sin 377t$$

11.9.2 El generador de corriente directa

El generador de corriente directa (cd), es una máquina similar a un generador de corriente alterna (ca). La gran diferencia reside en que los anillos deslizantes, que conectan la espira con un circuito externo, son reemplazados por un único anillo, que es partido en dos partes iguales, con el objeto de eliminar las inversiones de la polaridad del voltaje que, necesariamente, se producen en el generador de co-

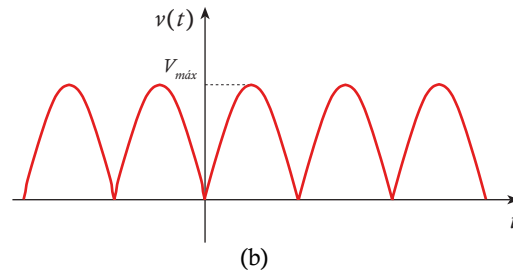
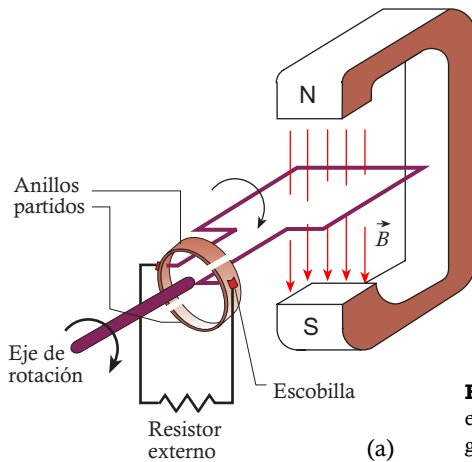


Fig. 11.16 Diagrama simple de un generador de corriente directa. Mediante el conmutador, la parte negativa de la onda sinusoidal se convierte en positiva, generando una onda pulsante, tal como se muestra en la parte (b) de la figura.

riente alterna. El anillo bipartido, recibe el nombre de *conmutador*. La fig. 11.16(a) muestra el diagrama esquemático de un generador de cd. Con el uso del conmutador se logra que la mitad negativa de la onda de corriente alterna se invierta y se haga positiva, pues cada medio ciclo, cuando la polaridad de la fem se invierte, los contactos de las escobillas con el anillo separado también se invierten, con lo cual se obtiene una corriente pulsante que circula en una misma dirección, porque la polaridad permanece inalterada, tal como se muestra en la fig. 11.16(b). Esta corriente pulsante no es adecuada para operar artefactos, por lo que en la práctica se instalan en la armadura muchas bobinas con igual número de conmutadores, con lo cual se logra que los pulsos de cada una de estas bobinas se superpongan, obteniendo una corriente directa, esencialmente libre de ondulaciones.

11.9.3 Motores de corriente alterna y de corriente directa

Los motores eléctricos son máquinas que convierten la energía eléctrica en energía mecánica. La utilización de estas máquinas en la vida moderna es muy amplia, razón por la cual se requieren muchos diseños para satisfacer las exigencias de las más diversas actividades que deben desempeñar. Así, por ejemplo, los motores utilizados para mover los álabes de un compresor de aire, deben tener velocidad constante. Las licuadoras del hogar, utilizan motores que funcionan a altas y variadas velocidades. El motor de una máquina eléctrica de afeitar debe tener un peso muy ligero.

Los motores eléctricos se agrupan en dos grandes categorías: *motores de corriente alterna* y *motores de corriente directa*.

El motor de corriente alterna

En el capítulo 8 se indicó que si una corriente fluye en una espira, ésta puede ser sometida a un momento de torsión o torque, con lo cual puede girar alrededor de un eje que pase por su centro. Allí se indicó, también, que la posibilidad de hacer girar una espira que conduce una corriente en un campo magnético, constituye el principio físico del funcionamiento de los motores eléctricos.

Como ya se ha explicado, podemos generar una fem en una espira moviéndola en un campo magnético uniforme, usando una energía mecánica externa, con lo cual, según el principio de la conservación de la energía, se transforma energía mecánica en energía eléctrica. Con la misma espira de este generador se puede construir un motor, aplicándole a dicha espira una corriente alterna proveniente de un generador de ca. La interacción de esta corriente alterna con el campo magnético uniforme crea sobre la espira un momento de torsión, capaz de hacerla girar y transformar, de esta manera, energía eléctrica en mecánica.

El motor de corriente directa

El motor de corriente directa (cd) es similar al generador elemental de cd. La espira entre los polos de un imán conecta sus terminales al conmutador, sobre el

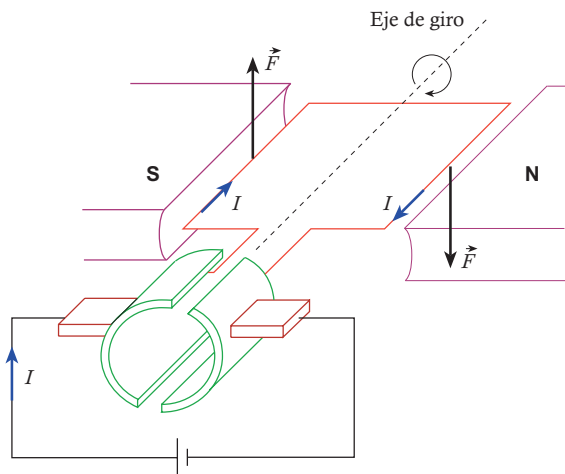


Fig. 11.17 Diagrama esquemático de un motor de cd. Una fuente de corriente directa suministra la energía eléctrica que alimenta la espira a través del conmutador. La corriente de la espira interactúa con el campo magnético uniforme para generar un momento de torsión que hace rotar a la espira continuamente. De esta forma, la energía eléctrica se convierte en energía mecánica.

cual deslizan las escobillas, las que a su vez van conectadas a una fuente de voltaje de cd, tal como se muestra en la fig. 11.17. El principio de operación está fundado en la interacción entre el campo magnético y la corriente que circula por una espira, tal como se describió en el capítulo 8. Al circular una corriente en una espira en un campo magnético uniforme, se produce un momento de torsión en los lados de la espira que cortan líneas del campo, lo que hace que la espira gire hasta que el vector área, $\vec{A}$, sea paralelo al vector campo magnético $\vec{B}$. En este punto, la espira se detiene, porque el momento de torsión se hace cero, como fue demostrado en el capítulo 8. Para lograr que la espira continúe su movimiento de rotación, se hace necesario aplicar, en ese preciso instante, una corriente a la espira en dirección contraria, para lograr que la interacción entre el campo magnético y la dirección de esta corriente cree el momento de torsión en la misma dirección anterior. La aplicación de la corriente en dirección contraria, la realiza el conmutador, el cual consta como en el caso del generador de cd elemental, de un anillo deslizable bipartido, donde cada una de las partes va conectada a cada uno de los extremos de la espira, como se indica en la fig. 11.17. Luego, cada 180° la corriente se invierte en forma automática, lo que da lugar a un momento de torsión que hace

que la espira continúe su giro forma continua.

En el motor de cd, también se produce una fuerza contraelectromotriz inducida que se opone al voltaje aplicado. En el momento que el motor inicia un giro, no existe fuerza contraelectromotriz inducida; por lo tanto, la corriente, llamada normalmente *corriente de arranque*, es muy grande, ya que la misma en ese momento, solo está limitada por la resistencia de la espira, la cual es bastante baja. Luego que el motor va adquiriendo velocidad, simultáneamente se va induciendo la fuerza contraelectromotriz y como ésta es opuesta a fem aplicada, la corriente en la espira también baja continuamente hasta que el motor adquiere su *velocidad nominal* de trabajo, con una corriente estable. Es muy importante, siempre que sea posible, arrancar el motor sin carga en el eje, para lograr que el mismo adquiera velocidad en el menor tiempo posible, con lo cual se pueda inducir la fuerza contraelectromotriz, necesaria para limitar la corriente de arranque.

Si el voltaje aplicado a los terminales de las bobinas de un motor es V y R es la resistencia de los conductores de la bobina del rotor, cuando el motor ha adquirido su velocidad nominal se ha inducido una fuerza contraelectromotriz $\mathcal{E}_{fc}$ que se opone al voltaje aplicado. En consecuencia, se puede escribir:

$$V - \mathcal{E}_{fc} = RI \quad (11.35)$$

De esta ecuación podemos ver que la corriente en un circuito, donde se ha conectado un motor, depende fundamentalmente de la fuerza contraelectromotriz. Así, la corriente de arranque de un motor influye decisivamente en la capacidad del circuito que lo alimenta porque las altas corrientes de demanda en el arranque requieren sistemas eléctricos de potencia adecuada, capaces de mantener niveles adecuados de suministro de voltaje a otros equipos conectados, para que estos puedan funcionar bien. Si por alguna razón la carga en el eje del motor se hace tan grande que el motor no pueda girar, y si no opera un control que abra la alimentación de corriente, las bobinas con seguridad se fundirán, pudiendo hasta ocasionar un incendio y además provocar que equipos conectados al circuito del motor no puedan operar por caídas del voltaje inadecuadas de operación.

Ejemplo 11.10

En un motor de cd las bobinas del rotor tienen una resistencia total de 5 ohm y las mismas son alimentadas a través del conmutador, con un voltaje de 120 V. Cuando motor es puesto en marcha y adquiere su velocidad nominal, la corriente que consume es de 5 A. Calcula: **a)** La fuerza contraelectromotriz. **b)** La corriente de arranque.

Solución

a) La fuerza contraelectromotriz generada en las bobinas cuando el motor ha adquirido su velocidad nominal, se calcula a partir de (11.34):

$$\mathcal{E}_{fc} = V - RI = 120 - 5 \cdot 5 = 95 \text{ V}$$

b) En el instante en que se acciona el botón de arranque en el control del motor, para ponerlo en marcha, la fuerza contraelectromotriz no ha tenido tiempo de crearse, por lo tanto $\mathcal{E}_{fc} = 0$. De la relación (11.34) se tiene entonces que $V = IR$, siendo I la corriente de arranque. Despejando I y sustituyendo valores se obtiene:

$$V = RI \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{120}{5} = 24 \text{ A}$$

Se puede notar, de este resultado, la enorme diferencia entre la corriente de arranque y la corriente nominal de trabajo que es de 5 A. Esta gran diferencia de corrientes, que siempre ocurre al arrancar un motor, bien sea de ca o dc y que entre mayor sea la potencia del motor mayor será esta diferencia, tiene influencia muy desfavorable para el trabajo correcto de equipos que sean alimentados desde el sistema eléctrico donde opera el motor, debido a caídas de voltaje en conductores alimentadores de potencia de dicho sistema. Para motores grandes, por encima de 100 HP de potencia, existen equipos limitadores de la perjudicial corriente de arranque.

11.10 EL TRANSFORMADOR

El transformador es una máquina eléctrica estática, es decir, que no tiene partes móviles, como los generadores y motores. El transformador es un producto de la

ciencia básica aplicada, es decir, es un producto de la tecnología, basada en los conocimientos científicos.

En forma simple podemos describir al *transformador como un dispositivo de inducción, utilizado para convertir un voltaje alterno bajo con una corriente elevada, en un voltaje alterno elevado con una corriente baja*. Lo inverso también es cierto.

La fig. 11.18(a) muestra un diagrama de las partes esenciales de un transformador, donde pueden verse dos bobinas de conductor aislado, arrolladas en un núcleo de hierro dulce. La bobina a la cual se conecta la fuente de voltaje alterno se denomina *primario* y la otra bobina, que se conecta a una resistencia de carga, recibe el nombre de *secundario*. Cualquiera de los arrollamientos puede ser utilizado como primario o secundario. La finalidad del núcleo de hierro es permitir una gran permeabilidad a las líneas del campo magnético variable, creado por la corriente alterna, de tal manera de facilitar la trayectoria de dicho campo, para que este se confíne al núcleo y pueda abrazar completamente tanto a la bobina primaria, como a la

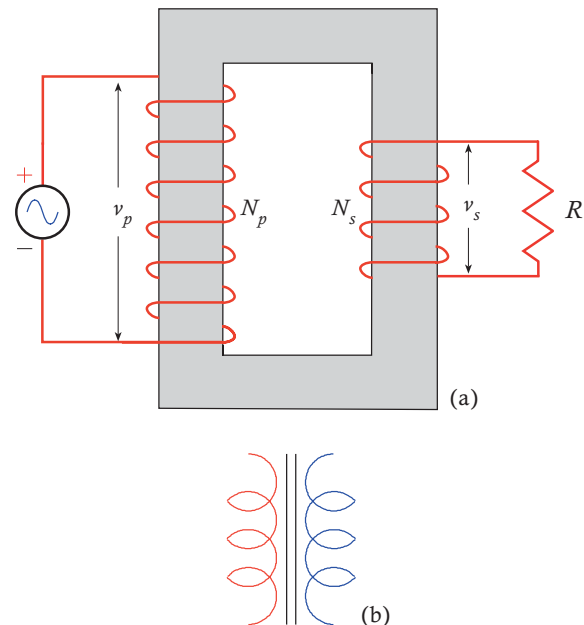


Fig. 11.18 a) Diagrama esquemático de transformador. Sobre un núcleo de hierro se enrolla la bobina primaria de N_p vueltas y la bobina secundaria de N_s vueltas. El voltaje de entrada se aplica al primario del transformador, mientras que en el secundario se conecta una carga R . b) Símbolo eléctrico de un transformador de núcleo de hierro.

bobina secundaria. La fig. 11.18(b) es el símbolo que se utiliza para representar un transformador con núcleo de hierro.

La resistencia de la bobina primaria suele ser bastante pequeña, por lo que las pérdidas de energía en ésta son muy bajas; esto hace que los transformadores comunes y corrientes tengan una alta eficiencia en la transferencia de energía del devanado primario al secundario, eficiencia que oscila entre el 90% al 99%.

Hay que tener presente que en el devanado primario, de acuerdo con la ley de Lenz, se induce una fem inversa, para oponerse a los cambios del flujo magnético producidos por la variación del voltaje aplicado. Esta fem inversa se opone también al voltaje aplicado, con lo cual se limita la corriente en la bobina primaria. Esta es la razón por la cual, a pesar que la resistencia eléctrica de la bobina es pequeña, la corriente no es demasiado alta. Si lugar de una corriente alterna, se aplicara una corriente directa, en cuyo caso no se induce ninguna fem inversa, la corriente sería muy grande, pudiendo fundir la bobina por calentamiento.

En el análisis de lo que ocurre en los circuitos primario y secundario en un transformador, cuando se aplica al primario un voltaje alterno, se considera al transformador como una máquina ideal, donde el flujo variable con el tiempo, debido a la variación del voltaje aplicado, pasa por igual por todas las espiras, tanto de la bobina primaria como de la bobina secundaria, de tal manera que la fem inducida es igual para todas las espiras de las bobinas. Se considera, también, que la resistencia óhmica de los devanados es muy pequeña, de forma que no hay caídas óhmicas de voltaje, RI . Por otra parte, el flujo total a través de la bobina primaria es igual a $N_1\Phi$ y a través de la bobina secundaria es $N_2\Phi$.

De acuerdo con la ley de Faraday, al aplicar un voltaje v_1 alterno al primario se induce en éste una fem dada por:

$$\mathcal{E} = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (11.36)$$

Como no existen pérdidas, porque no existen caídas óhmicas, como se dijo antes, esta fem inducida es numéricamente igual al voltaje primario V_1

aplicado. Por lo tanto:

$$V_1 = \mathcal{E} = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Igualmente, para el secundario se tiene:

$$V_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos relaciones anteriores:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (11.37)$$

Si $V_2 > V_1$, por ser $N_2 > N_1$, el transformador se conoce como *transformador elevador*, en caso contrario el transformador será un *transformador reductor*.

La potencia del circuito primario es $P_1 = V_1 I_1$ y, como se trata de un transformador ideal, donde no existen pérdidas de potencia, recuerda que la eficiencia de los transformadores puede llegar al 99%, la potencia en el secundario será igual a la del primario:

$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 I_1 = V_2 I_2$$

De la expresión anterior, nos queda:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (11.38)$$

Las relaciones (11.37) y (11.38), se pueden utilizar para expresar la relación de las corrientes en función del número de espiras de cada bobina:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (11.39)$$

El transformador es un dispositivo indispensable en la vida moderna. Para transmitir grandes potencias a largas distancias se requiere elevar el voltaje de salida para reducir las pérdidas por calentamiento en

las líneas de transmisión de potencia. En nuestro país existen líneas de transmisión de potencia con un voltaje de hasta 800.000 V. Son líneas que salen de la central de generación en El Guri, estado Bolívar, y llegan hasta el occidente del país, en el estado Zulia. En su recorrido del Sur a Occidente, a partir de estas líneas de transmisión, se van haciendo derivaciones de otras líneas que operan a voltajes menores, para alimentar regiones específicas.

Así, para suministrar energía eléctrica a regiones completas, que involucran varios estados, se derivan líneas a un voltaje de 400.000 V, lo cual se lleva a cabo mediante grandes transformadores de potencia reductores, pues reducen el voltaje de 800.000 V a 400.000 V. Dentro de las regiones, se vuelve a reducir este voltaje, para llevarlo a 230.000 V, con el objeto de alimentar líneas de transmisión que llevan potencia a subregiones de gran consumo, que engloban varias ciudades. En estas subregiones se vuelve a reducir este voltaje, para llevarlo a 115.000 V, que alimentan líneas que transmiten potencia a grandes partes de una ciudad. En este punto se vuelve a reducir el voltaje para llevarlo a 13.800 voltios, que es el llamado voltaje de distribución de potencia, que se lleva a cabo a través de líneas que distribuyen la potencia por las calles de una ciudad. Finalmente, este voltaje se reduce al voltaje de utilización de los consumidores, como son los hogares, comercios y pequeñas industrias, donde el voltaje utilizado, el cual todos conocemos, viene normalmente en dos

niveles, el nivel de 120 voltios y el nivel de 220 voltios. Estos voltajes de utilización, se obtienen mediante transformadores reductores, llamados *transformadores de distribución*, comúnmente instalados en postes por las calles de un ciudad, pueblo o caserío.

Ejemplo 11.11

El voltaje aplicado a la bobina primaria de un transformador de distribución, es de 13.800 V y la salida en los terminales de la bobina secundaria es de 120 V. **a)** Calcula la relación del número de vueltas de la bobina primaria con respecto a las vueltas de la bobina secundaria. **b)** Si la corriente máxima a la salida del transformador es de 275 A, calcula la máxima corriente en la bobina primaria

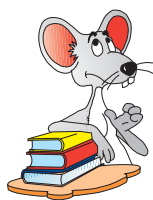
Solución

a) La relación de vueltas se calcula aplicando la relación (11.37):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{13.800}{120} = 115$$

b) A partir de (11.39) se obtiene la corriente máxima en la bobina primaria:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{1}{115} \cdot 275 = 2,39 \text{ A}$$



PIENSA Y EXPLICA



- 11.1** Si una espira de alambre conductor, se encuentra dentro de un campo uniforme, describe: **a)** La posición que debe tener la espira, para que el flujo magnético que atraviesa su área sea un máximo. **b)** Describe, también, para qué posición el flujo magnético que la atraviesa es cero. **c)** Escribe la

ecuación que describe cómo varía el flujo que atraviesa la espira en un giro de 180° .

- 11.2** La fig. 11.19 muestra una barra conductora que se mueve en la misma dirección de un campo magnético uniforme. Indica y describe cuál de las

siguientes preguntas es la correcta: **a)** La fuerza magnética del campo empuja a los electrones libres de la barra hacia el extremo inferior. **b)** Se induce una fem en la barra. **c)** Se producirá un campo eléctrico inducido que mueve las cargas eléctricas dentro de la barra. **d)** No se producirá nada de lo anterior.

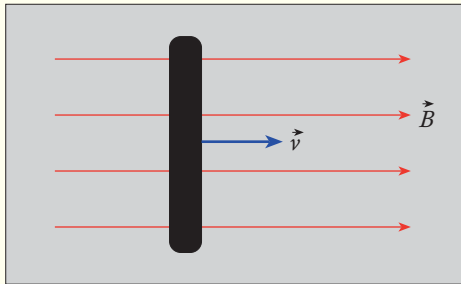


Fig. 11.19 Piensa y explica 11.2.

11.3 El plano de una espira descansa sobre la página. Un galvanómetro conectado a los terminales de la espira detecta una corriente inducida en la espira, en la dirección de las agujas del reloj. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta y por qué. **a)** Un campo magnético uniforme apunta hacia afuera del plano de la espira. **b)** Un campo magnético uniforme apunta en sentido contrario. **c)** Un campo magnético en aumento está dirigido hacia el plano de la espira. **d)** Un campo magnético decreciente está dirigido en sentido contrario. **e)** Un campo magnético decreciente apunta hacia afuera de la espira.

11.4 Un anillo conductor está sobre un campo magnético que aumenta de manera uniforme y está dirigido hacia el plano de la página, como se muestra en la fig. 11.20. Describe si el campo

magnético inducido dentro del anillo está dirigido: **a)** En el sentido de las agujas del reloj y es constante. **b)** En sentido anti-reloj y es constante. **c)** En sentido de las agujas del reloj y es variable. **d)** En sentido anti-reloj y es variable. **e)** Ninguna de las afirmaciones anteriores.

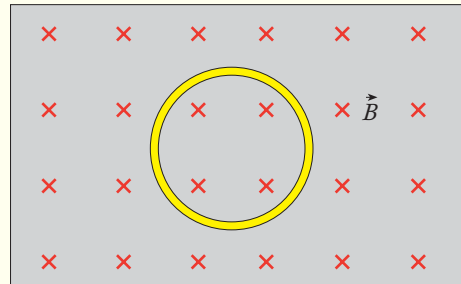


Fig. 11.20 Piensa y explica 11.4.

11.5 La fig. 11.21 muestra un trozo de conductor que se mueve con velocidad constante sobre un campo magnético uniforme producido por el imán de barra en posición vertical. **a)** ¿Cree Ud. que se induce en el trozo de conductor una fem? **b)** De ser esto cierto, ¿cuál extremo del conductor adquiere una concentración de cargas positivas y cuál una concentración de cargas negativas? **c)** ¿Cómo podrías aumentar la magnitud de la fem, manteniendo el mismo imán? **d)** Diga cómo se podría invertir la polaridad de la fem inducida.

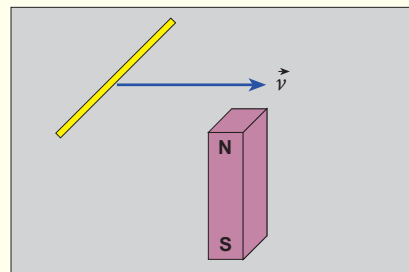


Fig. 11.21 Piensa y explica 11.5.

- 11.6** Explicar por qué a la fem inducida que se genera en un circuito, cuando por él circula una corriente variable con el tiempo, se le llama fem inversa o fuerza contraelectromotriz?
- 11.7** Se tiene una bobina circular que gira a velocidad angular constante, alrededor de un eje rotación que pasa por su centro, en un campo magnético uniforme. El vector área es paralelo al campo, como se muestra en la fig. 11.22. Explica si hay o no fem inducida.

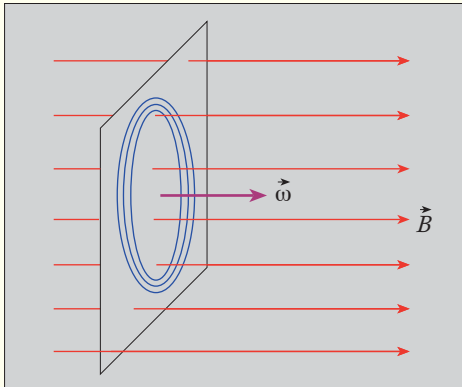


Fig. 11.22 Piensa y explica 11.7.

- 11.8** La fig. 11.23 muestra dos espiras con un imán de barra situado en sus respectivos ejes. Si el imán se mueve hacia la espira 2, indica las direcciones de las corrientes inducidas en cada espira.

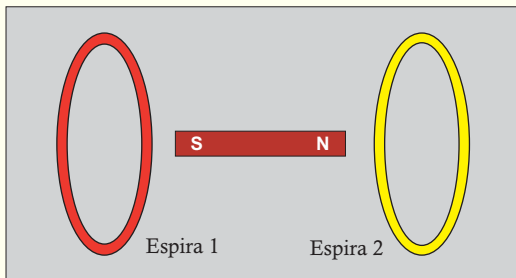


Fig. 11.23 Piensa y explica 11.8.

- 11.9** Explica por qué es necesario hacer un esfuerzo mayor, al tratar de introducir un imán en una bobina, que una espira.

- 11.10** Se tienen dos imanes tipo de barra idénticos A y B y los mismos se dejan caer desde la misma altura. El imán A cae sobre una tabla de madera, mientras que el imán B cae sobre una lámina metálica. ¿Los dos imanes caen al mismo tiempo? Explica.

- 11.11** Si se tiene una espira por la que circula una corriente y ésta está aumentando. ¿Es posible que la fem autoinducida produzca un aumento mayor de la corriente? Explica.

- 11.12** La fig. 11.24 muestra dos bobinas circulares de cualquier diámetro. a) Si la bobina 1 se acerca más a la bobina 2, ¿cómo varía el coeficiente de inducción mutua M_{12} ? b) Si la bobina 1 gira de tal manera que su eje quede perpendicular al eje de la bobina 2, ¿qué le ocurre a la inductancia mutua, disminuirá, aumentará o permanecerá igual?

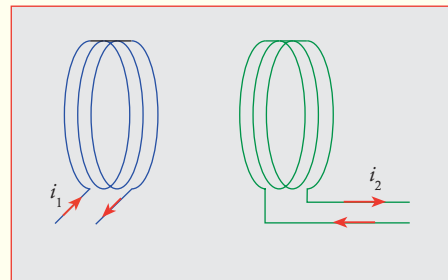


Fig. 11.24 Piensa y explica 11.12.

- 11.13** Se considera que los generadores y motores son una misma máquina, ya que su construcción es esencialmente igual y la diferencia estriba en su

funcionamiento. Explica brevemente cómo es el funcionamiento de un generador y cómo es el de un motor y las formas de energía que absorben y transforman. Después de esta descripción, ¿podrías afirmar que un motor actúa como un generador cuando gira? Argumenta tu respuesta.

- 11.14** Si el rotor o armadura de un motor que está en funcionamiento se para de repente, por cualquier causa, ¿qué daños podrían ocurrir en los bobinados del rotor si oportunamente un interruptor de protección no actúa? Explica la causa que puede dar lugar a daños en los bobinados.
- 11.15** Un generador de *ca* puede convertirse en un generador de *cd*. Explica brevemente cómo puede hacerse esto
- 11.16** Cuando un motor de una potencia significativa arranca, se puede observar un parpadeo de las luces de los circuitos de alumbrado que se derivan del panel de iluminación y fuerza donde está conectado el motor. Explica la causa de este fenómeno.

- 11.17** Un transformador como se ha explicado, es una máquina estática, con una bobina primaria donde se aplica un voltaje de entrada y una bobina secundaria con un voltaje inducido de salida. Este último voltaje puede ser mayor o menor al voltaje de entrada, dependiendo del número de vueltas de la bobina. Si se requiere un voltaje de salida mayor que el de entrada, el número de vueltas de cada bobina debe cumplir con la relación: **a)** $N_1 > N_2$. **b)** $N_2 > N_1$. **c)** Ninguna de las dos. Explica.

- 11.18** Al transmitir una potencia de 5 MW a través de una línea eléctrica de aproximadamente 10 km de longitud, ocurren pérdidas de potencia, por efectos de calentamiento, debido a la resistencia de los conductores. Con el fin de reducir estas pérdidas, la transmisión de la potencia debe realizarse: **a)** Al valor del voltaje producido en la central de generación, que es de 7.200 V. **b)** A un voltaje menor a 7.200 V. **c)** A ninguno de estos voltajes. Explica, en cada caso, la respuesta.



PROBLEMAS



- 11.1** Una espira circular de alambre conductor, de 12 cm de diámetro, está situada un campo magnético uniforme dirigido horizontalmente. El plano de la espira forma un ángulo de 60° con el campo, como se muestra en la

fig. 11.25. Si el flujo magnético, que atraviesa el área de la espira, tiene un valor de 0,75 Wb, calcula la magnitud del campo magnético.

- 11.2** La fig. 11.26 muestra una espira

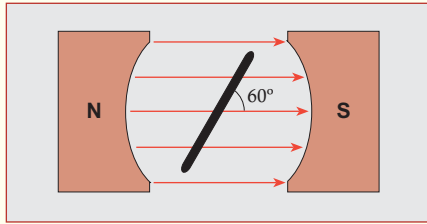


Fig. 11.25 Problema 11.1.

cuadrada, cuyos lados miden 7 cm y la cual forma un ángulo θ con el eje Z. Un campo magnético uniforme, de magnitud 0,4 T apunta en el sentido negativo del eje X. Calcula el flujo magnético que atraviesa el área de la espira para: a) $\theta = 0^\circ$. b) $\theta = 30^\circ$. c) $\theta = 60^\circ$. d) $\theta = 90^\circ$.

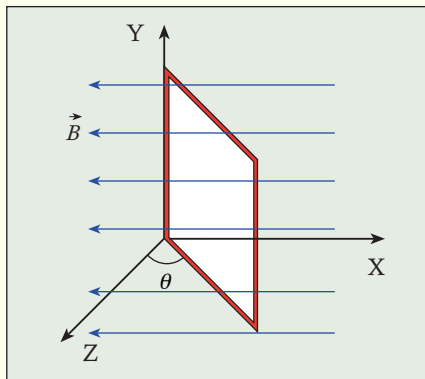


Fig. 11.26 Problema 11.2.

11.3 Una espira circular de alambre conductor, de 6 cm de radio, entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme, de magnitud 1,3 T. En un momento dado, mientras la espira se mueve en el campo, éste cambia a un valor de 0,17 T en un tiempo de 0,0015 s. Calcula la fem inducida en la espira.

11.4 Una bobina circular, de 15 cm de radio, constituida por 150 vueltas de alambre conductor aislado, se en-

cuentra en un campo magnético uniforme de magnitud 0,4 T, perpendicular a éste. Calcula la fem inducida en la bobina, cuando en 0,15 s, ocurren cada uno de los siguientes hechos: a) El campo magnético aumenta a 0,6 T. b) El campo magnético se reduce a cero. c) La dirección del campo magnético gira 180° . d) La dirección de la bobina gira 90° . e) La dirección de bobina gira 180° .

11.5 Una bobina rectangular de 50 vueltas, donde cada vuelta tiene las dimensiones de 25 cm de largo por 15 cm de ancho, tiene una resistencia total de 18 ohms. La bobina se mueve hacia la derecha, a velocidad constante de 3 m/s y penetra en un campo magnético uniforme de magnitud 0,75 T, dirigido hacia la página, tal como se muestra en la fig. 11.27. Calcula la fem inducida, la corriente inducida e indica su dirección y la magnitud y dirección de las fuerzas sobre la bobina cuando: a) La bobina está entrando al campo magnético. b) La bobina se mueve dentro del campo c) La bobina está saliendo del campo. d) Explica como actúan las fuerzas magnéticas sobre los portadores de carga eléctrica, en las tres posiciones presentadas en el problema.

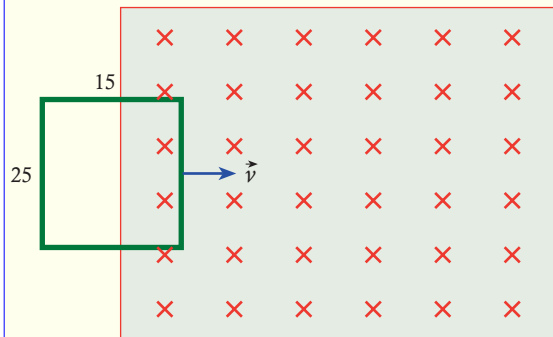


Fig. 11.27 Problema 11.5.

- 11.6** La fig. 11.28 muestra una barra conductora de longitud $L = 75$ cm, que se desplaza a una velocidad constante de $7,5$ m/s, sobre un campo magnético uniforme de magnitud $0,75$ T, perpendicular al movimiento de la barra y dirigido hacia la página. Calcula la diferencia de potencial creada en los extremos C-D de la barra, indicando cuál de estos tiene el potencial más elevado.

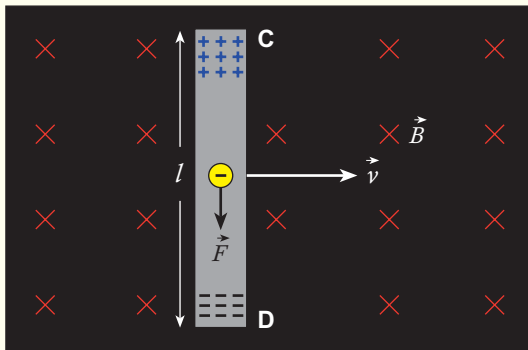


Fig. 11.28 Problema 11.6.

- 11.7** La fig. 11.29 muestra una barra conductora A-B, de longitud 45 cm, que se desliza a velocidad constante de 5 m/s, sobre un conductor en forma de U. El circuito constituido por la barra y el conductor en U está en un campo magnético uniforme de magnitud $0,4$

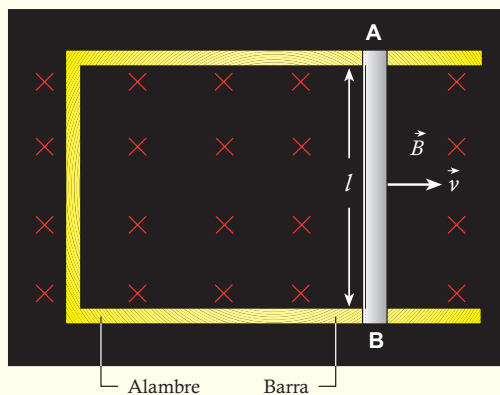


Fig. 11.29 Problema 11.7.

T, dirigido hacia la página, y tiene en su totalidad una resistencia de $0,37$ ohms. Calcula: **a)** La fem inducida, indicando la dirección de la corriente. **b)** La fuerza externa requerida para mantener el movimiento de la barra. **c)** Compara la potencia desarrollada por la fuerza, para mantener el movimiento de la barra, con la potencia disipada en la resistencia, por efecto Joule (I^2R).

- 11.8** Refiriéndonos a la fig 11.29 del problema anterior, supón que la resistencia del circuito es de 7 ohms, que la barra tiene una longitud de 75 cm y se mueve a velocidad constante de $2,5$ m/s. Si en la resistencia se disipan 15 W en forma de calor, ¿cuál será la magnitud del campo magnético?

- 11.9** Se tiene un solenoide con una inductancia total de 37 mH. Cuando se cierra el interruptor del circuito que alimenta el solenoide, la corriente tarda $0,15$ s en adquirir un valor estable de 2 A. Calcula la fem autoinducida.

- 11.10** Un solenoide, conformado por 500 vueltas de alambre conductor aislado, tiene una longitud de 18 cm y un área transversal de $4,5$ cm². Calcula la variación de la corriente, con relación al tiempo, que produce una fem autoinducida de $0,20$ mV.

- 11.11** Una bobina tiene una autoinducción de 12 H y por la misma fluye una corriente de 5 A, la cual cambia a razón de 215 A/s. Calcula: **a)** El flujo magnético que pasa a través del área de la bobina. **b)** La fem autoinducida.

- 11.12** Una bobina circular A, de radio 30 cm y 150 vueltas, tiene en su interior una bobina circular B de 75 vueltas, con

un área de interior de $4,5 \text{ cm}^2$. Calcula: **a)** La inducción mutua. **b)** La fem inducida en la bobina B, si la corriente en la bobina A aumenta a razón de 75 A/s . **c)** La variación del flujo magnético con respecto al tiempo, que atraviesa el área de la bobina B, cuando la corriente en la bobina A está aumentando a la razón indicada en el punto (b).

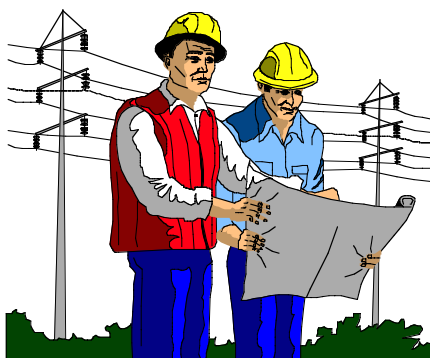
11.13 En un generador de ca, la armadura o rotor tiene 75 espiras rectangulares, cuyos lados miden 6 cm y 10 cm. El voltaje generado es de forma sinusoidal, con valor máximo de 45 voltios. Calcula la frecuencia de giro del rotor, si la magnitud del campo magnético uniforme del estator es de 275 mT.

11.14 Si el rotor de un generador gira a 1.800 rps y produce una fem máxima de 75 V, calcula la fem máxima que se genera cuando rota a 3600 rps, suponiendo nada ha cambiado, excepto la velocidad de giro.

11.15 Un motor de cd de 120 V, absorbe una corriente de 20 A en funcionamiento nominal. La resistencia del rotor o armadura, es de 3Ω . Calcula: **a)** La fuerza contraelectromotriz, cuando el motor funciona a velocidad nominal. **b)** La corriente de arranque.

11.16 El devanado de un motor de arranque de un automóvil tiene una resistencia de $0,50 \Omega$. La batería que alimenta al motor es de 12 V. Cuando el motor ha adquirido su velocidad nominal de trabajo, la fuerza contraelectromotriz es de 8 V. Calcula: **a)** La corriente de operación del motor. **b)** La corriente de arranque.

11.17 La bobina primaria de un transformador tiene 750 vueltas y la bobina secundaria 150 vueltas. Cuando se aplica un voltaje alterno de 120 V a la bobina primaria, en ésta se genera una corriente de 1,8 A. Calcula: **a)** La corriente de salida en la bobina secundaria. **b)** El voltaje de salida secundario.



CAPÍTULO 12

CORRIENTE ALTERNA SINUSOIDAL

12.1 GENERACIÓN DE UNA CORRIENTE ALTERNA SINUSOIDAL

La corriente alterna sinusoidal tiene especial importancia en el diario quehacer de nuestras vidas. La mayoría de las aplicaciones domésticas e industriales están sujetas a la generación, transmisión y distribución de energía eléctrica en forma de ondas con características sinusoidales. Aun cuando muchos de los equipos electrónicos usados en el hogar utilizan corriente continua, esta es obtenida, por medio de circuitos especializados, a partir de la onda sinusoidal que recibimos en nuestras casas.

En la sección 6.5 describimos gráficamente el comportamiento de una corriente alterna sinusoidal. Esta gráfica, cuya forma típica se presenta, nuevamente, en la fig. 12.1, posee como característica fundamental la de ser una onda repetitiva en el tiempo. Es decir, su forma se repite

cada cierto tiempo T , al cual conocemos como *período*. Matemáticamente, esto se expresa así:

$$f(t) = f(t + T) \quad (12.1)$$

lo cual indica que dado un tiempo cualquiera t , el valor de la función es la misma para otro tiempo posterior $t + T$. Asimismo, podemos notar que la función sinusoidal alcanza un *valor máximo* o *valor pico*, denotado en la fig. 12.1 como $F_{\text{máx}}$.

Ahora bien, ¿cuál es el origen de la onda sinusoidal de voltaje que nos hace más agradable la vida? Como se ha estudiado anteriormente, y se ilustra en la fig. 12.2, basta que una espira se mueva dentro de un campo magnético para que en sus terminales aparezca un voltaje inducido. El movimiento de la

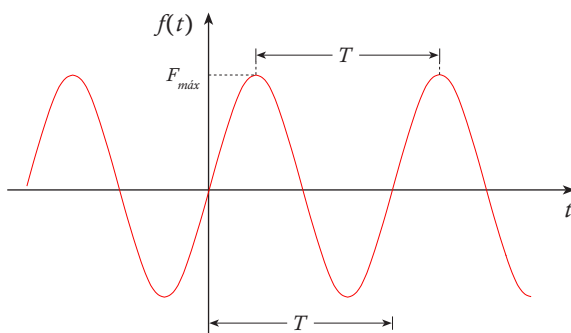


Fig. 12.1 Onda alterna sinusoidal. El valor de la onda se repite cada período de tiempo T .

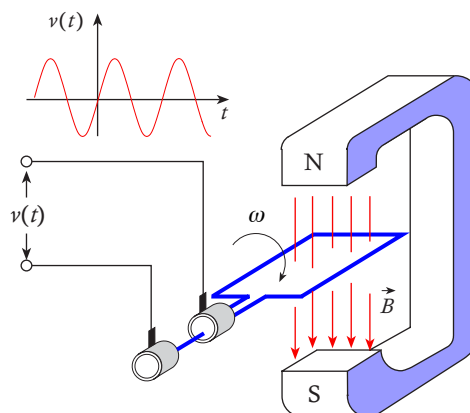


Fig. 12.2 Cuando una o varias espiras se mueven dentro de un campo magnético, se produce un voltaje entre sus terminales.

espira puede obtenerse a partir de una caída de agua, como sucede en las grandes centrales hidráulicas. En este caso, el agua, dejada caer desde una elevada altura, acciona unas turbinas que, a su vez, hacen girar a las espiras. En otro caso, como en las centrales termoeléctricas, el vapor a altas temperaturas produce el movimiento de las espiras.

Se supone que el campo magnético es uniforme y que la velocidad angular de giro, ω , es constante. La interacción entre el campo magnético y la espira moviéndose dentro de él, da origen a un voltaje sinusoidal cuya expresión general adopta la fórmula siguiente:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (12.2)$$

donde V_m es el valor máximo o pico del voltaje $v(t)$, expresado en voltios, ω es la velocidad angular de giro, expresada en rad/s y θ es el *ángulo de fase* expresado en radianes o en grados.

Como $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, la expresión (12.2) puede escribirse de la manera siguiente:

$$v(t) = V_m \sin(2\pi f t + \varphi) = V_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) \quad (12.3)$$

donde f es la frecuencia de la onda sinusoidal expresada en Hertz y T es el período expresado en segundos. La frecuencia en nuestro país de 60 Hz.

Es importante destacar que la forma sinusoidal representada por la relación (12.2) puede expresarse en término de la función coseno y los resultados del análisis de los circuitos excitados por funciones coseno son similares a los que se obtienen si la función es un seno. En otras palabras, cuando hablamos de voltajes sinusoidales, podemos seleccionar bien funciones seno o coseno, ya que estas están relacionadas mediante la fórmula:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12.4)$$

relación que indica que las funciones seno y coseno se diferencian solamente por un ángulo de $\pi/2$ radianes o 90° .

Un voltaje puede, entonces, ser representado mediante una función coseno similar a:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (12.5)$$

En la fig. 12.3 se muestran voltajes sinusoidales representados por funciones seno y coseno.

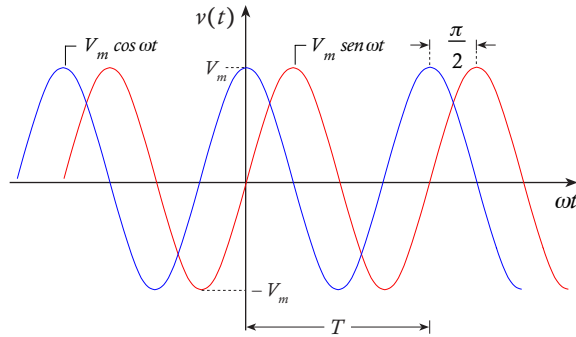


Fig. 12.3 Señales sinusoidales en formas de seno (línea roja) y coseno (línea azul). El voltaje representado por la onda coseno está adelantado $\pi/2$ radianes o 90° con respecto a la onda seno. Observa que $v(t)$ está en función de ωt .

Hay que hacer notar que en el eje de las abscisas la variable es ωt , por lo que sus unidades son radianes. Como puede verse de la gráfica, la función coseno está adelantada 90° con respecto a la función seno. Esto significa que el ángulo de fase entre esas dos funciones es $\pi/2$ o 90° .

Cuando se trata de corrientes alternas sinusoidales, las expresiones pueden tomar las siguientes formas:

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta) \quad i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (12.6)$$

donde I_m es el máximo valor de corriente.

En los circuitos eléctricos excitados por una onda sinusoidal las fuentes de voltaje se representan, tal como fue señalado en la fig. 7.1 y que se repite en la fig. 12.4. Como ya hemos mencionado, un voltaje alterno sinusoidal varía con el tiempo y puede ser negativo o positivo. El signo positivo en uno de los terminales de la fuente sólo quiere decir que en un momento dado y, para los efectos de la determinación de voltajes y corrientes en otros elementos del circuito al cual se conecta la fuente, se trabaja con el signo +, sin olvidar la condición de variabilidad en el tiempo del voltaje sinusoidal.

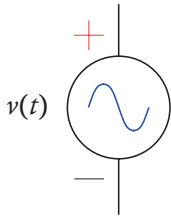


Fig. 12.4 Símbolo de una fuente de voltaje alterno sinusoidal.

Es interesante conocer las características del voltaje sinusoidal típico que encontramos en las instalaciones eléctricas industriales o residenciales. En los países de América del Norte, de Latinoamérica y del área del mar Caribe la frecuencia de la onda sinusoidal es 60 Hz. Esto implica que el período de la onda y la velocidad angular del generador que la produce son:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0,0167 \text{ s} = 16,67 \text{ ms}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 376,99 \text{ rad/s}$$

Es decir, la onda sinusoidal de voltaje se repite cada 16,67 milisegundos y, cada segundo, el generador que da lugar al voltaje, gira aproximadamente 377 radianes. Como 1 vuelta equivale a 360° o 2π radianes, la velocidad angular puede escribirse como:

$$\omega = \frac{367,99}{2\pi} = 58,57 \text{ rev/s} \quad \omega = 21.121,20^\circ/\text{s}$$

Otra cantidad que caracteriza al voltaje alterno que se utiliza comúnmente es su amplitud. Como hemos visto, la onda sinusoidal varía constantemente con el tiempo y no tendría sentido, para usos prácticos, especificar su valor a cada momento. Posiblemente hayas oído mencionar que el voltaje en nuestros hogares es de 110 voltios. En realidad, este valor es un tipo especial de promedio de la onda alterna, al cual se le conoce como *valor efectivo*, *valor eficaz* o *valor RMS* (por sus siglas en Inglés) del voltaje y está relacionado con el valor máximo o pico mediante la expresión:

$$V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0,707 V_m \quad (12.7)$$

De este valor hablaremos con más detalles en próximas secciones. Lo que podemos dejar asentado es que el valor eficaz del voltaje que recibimos en nuestros hogares está cercano a 110 V y que el valor pico o máximo del voltaje de la onda sinusoidal es mayor que el valor efectivo, de acuerdo con la relación (13.7). Así, tenemos:

$$V_m = \sqrt{2} V_{RMS} = \sqrt{2} \cdot 110 = 155,56 \text{ V}$$

Si representamos a una onda de las características descritas, obtenemos una gráfica similar a la fig. 12.5, con un período igual a 16,67 ms, un valor máximo de 155,56 V y un valor mínimo de $-155,56$ V. Si el eje de las X se representa por la variable ωt , la calibración del mismo puede hacerse en radianes o en grados.

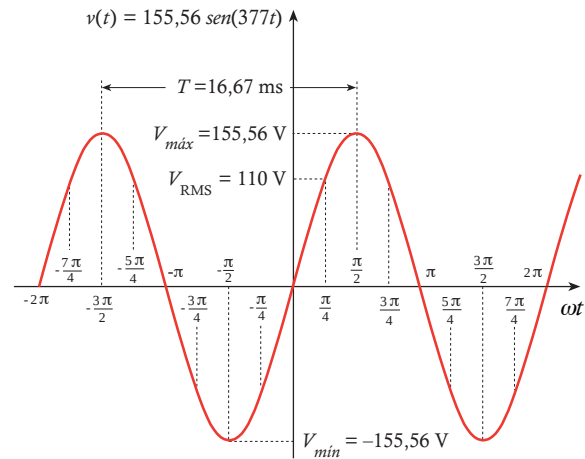


Fig. 12.5 Característica de la onda alterna de voltaje recibida en sectores residenciales. Su máximo y mínimo son, respectivamente, 155,56 V y $-155,56$ V. Su período es de 16,67 ms y su valor eficaz es de 110 V. El eje X está expresado en radianes.

Vale la pena mencionar aquí por qué se utiliza corriente alterna en lugar de corriente continua en la generación y distribución de la energía eléctrica. Este dilema fue planteado a comienzos del siglo XX, en los albores del uso de la electricidad y fue resuelto a favor del uso de la corriente alterna por la facilidad conque esta última puede ser cambiada de amplitud usando transformadores. De esta manera, es posible transmitir la energía a grandes distancias con valores muy altos de amplitud y, luego, disminuir los mismos, mediante transformadores apropiados.

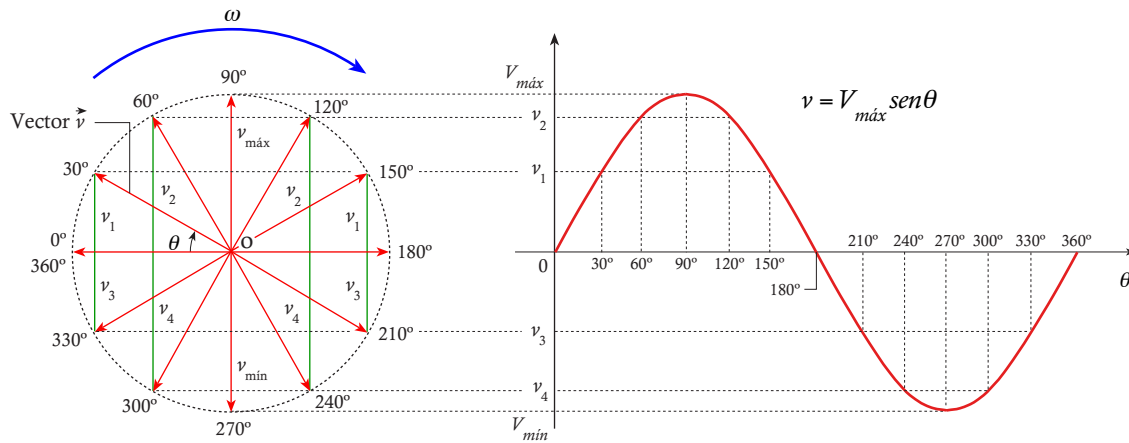


Fig. 12.6 Generación de una onda sinusoidal mediante un vector rotatorio.

Hemos descrito que un generador de corriente alterna produce un voltaje sinusoidal, en base al movimiento rotatorio que una bobina desarrolla en un campo magnético. Es bastante ilustrativo ver cómo un vector que rota alrededor de un eje puede dar origen a una onda sinusoidal. Para ello, observemos la fig. 12.6. El vector rotatorio, representado en color rojo, gira alrededor del punto **O** con una velocidad constante ω , en la dirección de giro de las agujas del reloj. Si comenzamos la observación del movimiento a partir de 0° , notaremos como, en su desplazamiento, el vector rotatorio va describiendo ángulos desde 0° a 360° . En la fig. 12.6 (parte izquierda de la figura) se han tomado intervalos de ángulos de 30° , de manera que podemos examinar qué sucede desde 30° hasta 360° (una vuelta completa) con la ordenada determinada por el vector cuando gira. A medida que se cubre la vuelta completa, anotamos (parte derecha de la figura) los valores de esta ordenada en función del ángulo girado.

Cuando $\theta = 0^\circ$ la ordenada es igual a cero y este es el valor que anotamos en la figura de la derecha. Cuando $\theta = 30^\circ$, la ordenada es v_1 y si continuamos tomando valores del ángulo y de la ordenada obtenemos la tabla 12.1. Cuando estos valores se grafican, se obtiene la parte derecha de la fig. 12.6, la cual corresponde a una onda o señal sinusoidal. Es preciso mencionar que el eje de las abscisas (X), puede también expresarse en radianes por segundo (rad/s) o en valores de tiempo (segundos), ya que el

Ángulo	Ordenada	Ángulo	Ordenada
0°	0	210°	v_3
30°	v_1	240°	v_4
60°	v_2	270°	$V_{\min}$
90°	$V_{\max}$	300°	v_4
120°	v_2	330°	v_3
150°	v_1	360°	0
180°	0		

Tabla 12.1 Valores que adquiere la ordenada que genera el vector rotatorio de la fig. 12.6, a medida que describe un ángulo de 360° .

ángulo θ , barrido por el vector, está en correspondencia con ωt (que tiene unidades de rad/s) a medida que transcurre el tiempo. Así cuando $v = v_1$, $t = t_1$ y $\omega t = \omega t_1$.

12.2 ÁNGULO DE FASE. DIFERENCIA DE FASE.

Consideremos, nuevamente, una onda sinusoidal representada por la relación (12.2):

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (12.8)$$

Al ángulo φ se le conoce como *ángulo de fase*, el cual, junto con V_m , determina el valor de la función $v(t)$ cuando $t = 0$. Para ver el significado de esto,

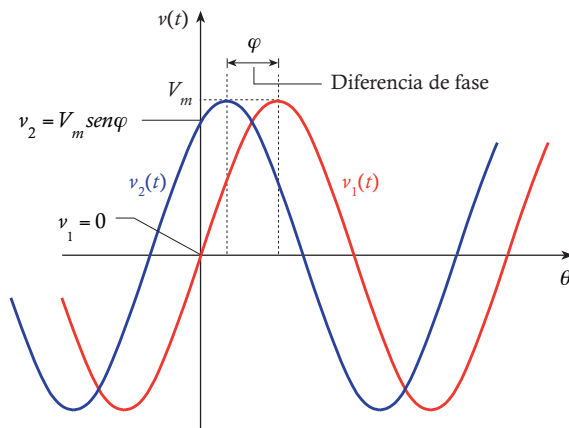


Fig. 12.7 Concepto de diferencia de fase.

consideremos la fig. 12.7, donde se representan las ondas de voltaje correspondientes a las funciones:

$$v_1(t) = V_m \sin(\omega t) \quad v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Como puede verse de las expresiones anteriores, ambas ondas poseen la misma amplitud (V_m) y la misma frecuencia. Esto último porque en el argumento de la función seno (la cantidad que está entre paréntesis) aparece la misma velocidad angular ω . No sucede lo mismo, sin embargo, con el ángulo de fase: para la función v_1 , el ángulo de fase es cero, mientras que para v_2 , el ángulo de fase es φ . Esta diferencia se hace notable en la fig. 12.7, donde se observa que para $t = 0$, el valor de v_1 es cero, mientras que para v_2 es $V_m \sin \varphi$. Esto significa que los valores de ambas funciones no coinciden en el tiempo. Si nos fijamos en el momento cuando las dos ondas alcanzan su máximo valor, V_m , observamos que entre las mismas hay un desfase: se dice que la onda v_2 está adelantada un ángulo φ con respecto a la onda v_1 . A este desfase se le conoce como *diferencia de fase* entre ambas ondas.

Es usual medir la diferencia de fase entre dos ondas de la misma frecuencia utilizando los valores máximos de las mismas. En la fig. 12.7 se señala cuál es el desfase entre v_1 y v_2 . Como v_2 alcanza su valor pico primero que v_1 , la primera está adelantada con respecto a la segunda o, también, v_1 está retrasada con respecto a v_2 . La diferencia de fase se expresa comúnmente en grados o en radianes.

Una diferencia de fase entre las ondas de voltaje y corriente aparece naturalmente en redes eléctricas que poseen elementos inductivos y capacitivos. Cuando los circuitos tienen sólo resistores, no hay diferencia de fase entre las ondas de voltaje y de corriente.

12.3 VOLTAJE Y CORRIENTE EN REDES RESISTIVAS

Una red resistiva es aquella que posee solamente resistores. En estos circuitos, de los cuales un bombillo incandescente o un calentador de agua son ejemplos típicos, la corriente y el voltaje aplicado están siempre en fase. Supongamos que los distintos resistores que conforman una red pueden ser reducidos a una resistencia equivalente, alimentados por una fuente sinusoidal de voltaje, tal como se ilustra en la fig. 12.8.

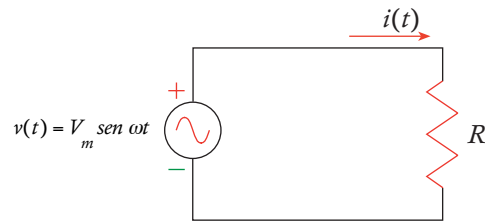


Fig. 12.8 Resistor excitado por un voltaje sinusoidal.

Para simplificar la explicación, supondremos que el ángulo de fase de la fuente es igual a cero ($\varphi = 0$). Si por algún medio, visualizamos el voltaje aplicado y la corriente que este genera, obtendríamos una gráfica similar a la mostrada en la fig. 12.9. Como puede verse, las ondas de voltaje y corriente alcanzan sus máximos y mínimos al mismo tiempo y, por tanto, están en fase.

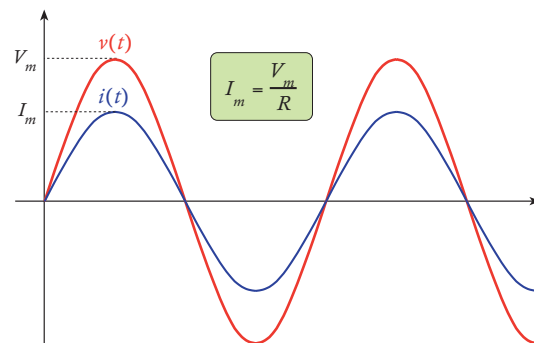


Fig. 12.9 En un resistor, las ondas de voltaje y corriente están en fase.

Conocido el valor del voltaje de la fuente de alimentación, dado por $v(t) = V_m \text{sen} \omega t$, la corriente en la resistencia obedece a la ley de Ohm. Luego, podemos escribir:

$$i(t) = \frac{V_m \text{sen} \omega t}{R} = \frac{V_m}{R} \text{sen} \omega t = I_m \text{sen} \omega t \quad (12.9)$$

donde I_m es el valor máximo de la corriente, cuyo valor es:

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad (12.10)$$

Si, inicialmente, el ángulo de fase del voltaje es distinto de cero, las expresiones para el voltaje y la corriente en un resistor excitado por una onda sinusoidal son:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (12.11)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{R} \text{sen}(\omega t + \varphi) = I_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (12.12)$$

donde I_m corresponde, de nuevo, a la relación (12.8).

Es de importancia fundamental señalar que la corriente que se genera en el circuito tiene exactamente la misma frecuencia que el voltaje aplicado. En general, esto es así para redes formadas por elementos pasivos que no introducen variación en la forma de la onda sinusoidal. Para los efectos de nuestro estudio, se considerará que este es el caso para los resistores, capacitores e inductores integrantes de las redes eléctricas.

12.4 REPRESENTACIÓN DE VOLTAJES Y CORRIENTES COMO VECTORES ROTATORIOS. FASORES.

Como vimos en la sección 12.1, fig. 12.6, un vector que rota a una velocidad angular constante, ω , puede dar origen a una onda sinusoidal. Similarmente, una onda sinusoidal puede ser representada por un vector que rota. A tales vectores se les conoce con el nombre de *fasores* y, puesto que la frecuencia de la onda permanece constante ($\omega = 2\pi f$), contienen la información necesaria para representar la señal sinusoidal. Esta información se reduce a conocer la

amplitud y el ángulo de fase de la onda sinusoidal. De acuerdo a esto, el voltaje y la corriente, ambas de naturaleza sinusoidal, presentes en una resistencia, pueden representarse de la manera siguiente:

a) Cuando el ángulo de fase es igual a cero:

$$v(t) = V_m \text{sen} \omega t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$$

$$i(t) = I_m \text{sen} \omega t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = I_m \angle 0^\circ$$

b) Cuando el ángulo de fase es igual a $\varphi \neq 0$:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \angle \varphi$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = I_m \angle \varphi$$

donde el fasor correspondiente a $v(t)$ se representa mediante la letra $\mathbf{V}$ (negritas) y el símbolo $\angle$ indica el ángulo de fase de la onda sinusoidal. La doble fecha que relaciona las expresiones en el tiempo con el correspondiente fasor, indica que se trata de una transformación reversible. Es decir, se puede pasar de la señal en el dominio del tiempo a la representación fasorial y viceversa. Como ejemplos numéricos de las transformaciones anteriores, tenemos:

$$v(t) = 20 \text{sen} 100t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = 20 \angle 0^\circ$$

$$i(t) = 5 \text{sen}(100t + 30^\circ) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = 5 \angle 30^\circ$$

De acuerdo a lo visto para obtener el fasor de una onda sinusoidal de $\omega = 377$ rad/s, se toman solamente el valor máximo y el ángulo de fase:

$$i(t) = 156 \text{sen}(377t + 53^\circ) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = 156 \angle 53^\circ$$

En la misma idea, para obtener la onda sinusoidal, cuya frecuencia se conoce, a partir de un fasor, se construye la función con el valor máximo y el ángulo de fase contenidos en el fasor:

$$\mathbf{I} = 156 \angle 53^\circ \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = 156 \text{sen}(377t + 53^\circ)$$

Tal vez hasta aquí no se tenga idea de la gran simplificación que el uso de fasores introduce en el manejo de las redes eléctricas alimentadas con fuentes sinuoidales. Es necesario mencionar, entonces, que los fasores pueden tratarse como vectores y las operaciones básicas, válidas en las

operaciones con éstos, pueden utilizarse para sumar corrientes y voltajes en una red eléctrica. En la fig. 12.10 se representan los fasores de corriente y voltaje de una red puramente resistiva. En un caso hemos asumido que el ángulo de fase del voltaje es de 0° , mientras que en el otro es de 30° . Como puedes notar, se usa un sistema de coordenadas cartesianas en el cual se representan los fasores en un momento determinado de su movimiento de rotación. En ambos casos, el fador corriente y el fador voltaje están sobre una misma recta; es decir, están en fase, por tratarse de un circuito resistivo.

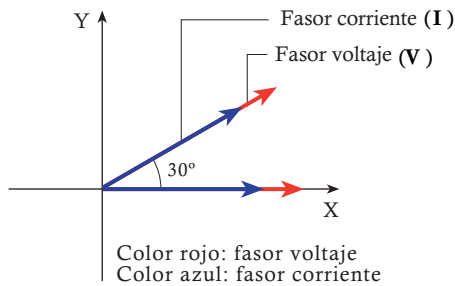


Fig. 12.10 Fasores de voltaje y corriente para un circuito resistivo. Los vectores correspondientes están en fase.

Si los fasores de la fig. 12.10, se sometieran a rotación y se tomaran los valores de las proyecciones sobre el eje de las ordenadas, el resultado serían ondas sinusoidales en el dominio del tiempo.

12.3.1 Representación de fasores: los fasores se tratan de manera parecida a los vectores. Un vector en dos dimensiones, tal como el dibujado en la fig. 12.11(a), se representa matemáticamente, en términos de los vectores unitarios, de la siguiente manera:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} = V \cos \varphi \vec{j} + V \sin \varphi \vec{i} \quad (12.13)$$

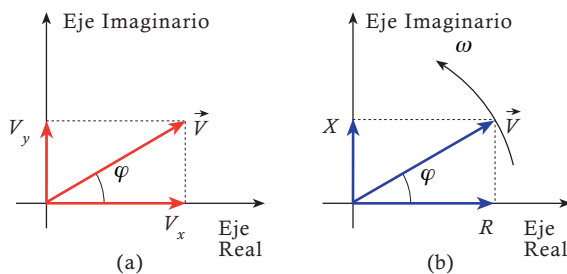


Fig. 12.11 Representación: a) De un vector. b) De un fador.

Para el caso del fador de la fig. 12.1(b), la expresión se representa como:

$$\mathbf{V} = R + jX = V \cos \varphi + jV \sin \varphi \quad (12.14)$$

En la representación anterior es notable lo siguiente:

a. La parte real se corresponde a la letra R , la cual está relacionada con la resistencia del circuito excitado por la fuente sinusoidal. Es costumbre no asociar a la parte real el vector unitario $\vec{i}$.

b. La parte imaginaria corresponde a la letra X que, como se verá más adelante, está relacionada con los elementos capacitivos e inductivos del circuito. A esta parte se le conoce como *reactancia* y se hablará de *reactancia capacitiva* si predominan los capacitores sobre los inductores y de *reactancia inductiva* si predominan los inductores sobre los capacitores. Es usual, cuando se trabaja con redes eléctricas, omitir la flechita del vector unitario $\vec{j}$.

De acuerdo con lo estudiado, un fador puede representarse como $\mathbf{V} = V \angle \varphi$, donde V es el módulo del fador, usualmente relacionado con la amplitud máxima de la onda sinusoidal y φ es el ángulo de fase de esta última. Comparando con la relación (12.13) se concluye lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \varphi & V_y &= V \sin \varphi \\ V &= \sqrt{R^2 + X^2} & \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{X}{R} \right) \end{aligned} \quad (12.15)$$

A la representación $\mathbf{V} = R + jX = V \cos \varphi + jV \sin \varphi$ se le conoce como *expresión rectangular o cartesiana* del fador, mientras que a la representación $\mathbf{V} = V \angle \varphi$ se le denomina *representación polar*. La primera se prefiere cuando se trata de suma o resta de fasores, mientras que la segunda se utiliza, con más frecuencia, en la multiplicación o división de fasores. Las operaciones mencionadas son similares a las

que se efectúan con vectores. Es conveniente, para agilizar los cálculos con fasores, utilizar una calculadora electrónica que permita pasar rápidamente de la forma cartesiana a polar o viceversa.

Ejemplo 13.1

Un voltaje sinusoidal aplicado a un circuito resistivo tiene la siguiente expresión:

$$v(t) = 50 \sin(4t + 35^\circ)$$

a) Escribe el fasor que describe a $v(t)$, tanto en forma polar como en forma cartesiana. b) Dibuja la forma de onda correspondiente a $v(t)$. c) Si el voltaje dado se conecta a un resistor de 10Ω , ¿cuál es el valor de la corriente en dicho resistor?

Solución

a) De acuerdo a lo estudiado, tenemos:

$$\text{Forma polar: } \mathbf{V} = 50 \angle 35^\circ$$

Forma cartesiana:

$$\mathbf{V} = 50 \cos 35^\circ + j50 \sin 35^\circ = 40,96 + j28,68$$

b) Para dibujar $v(t)$, tenemos que tomar en cuenta las unidades del argumento de la función seno. La frecuencia angular ω , en este caso 4, está expresada en rad/s. Si t se expresa en segundos, la cantidad $4t$ viene dada en radianes. Como la fase está en grados (45°), es necesario convertir el ángulo de radianes a grados, multiplicando a ω por $180/\pi$. Es decir:

$$v(t) = 50 \sin(4t + 35^\circ) = 50 \sin\left(4 \cdot \frac{180}{\pi} t + 35^\circ\right)$$

$$v(t) = 50 \sin(229,18t + 35^\circ)$$

La cantidad 229,18 está en grados/s, de manera que al multiplicar por t el resultado está en segundos. Veamos cuál es el período de la onda. Como $\omega = 2\pi/T$, se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = 1,57 \text{ s}$$

Esto quiere decir que la onda de voltaje completa

un ciclo en 1,57 s y que es conveniente tomar valores de tiempo entre $t = 0$ y $t = 1,57$ s. El ángulo θ , expresado en grados es igual a $(4t + 35^\circ)$. Construyamos la tabla 13.2 con intervalos de tiempo convenientes:

$t(\text{s})$	θ (Grados)	$\sin \theta$	$v(t)$
0	35,00	0,574	28,68
0,0314	42,20	0,672	33,58
0,0942	56,59	0,835	41,74
0,1570	70,98	0,945	47,27
0,2198	85,37	0,997	49,84
0,2826	99,76	0,986	49,28
0,3454	114,16	0,912	45,62
0,4082	128,55	0,782	39,10
0,4710	142,94	0,603	30,13
0,5338	157,34	0,385	19,27
0,5966	171,73	0,143	7,19
0,6594	186,12	-0,107	-5,33
0,7222	200,51	-0,350	-17,52
0,7850	214,90	-0,572	-28,61
0,8478	229,30	-0,758	-37,91
0,9106	243,69	-0,896	-44,82
0,9734	257,99	-0,978	-48,90
1,0676	279,67	-0,986	-49,29
1,1304	294,07	-0,913	-45,65
1,1780	304,97	-0,819	-40,97
1,2560	322,85	-0,604	-30,20
1,3188	337,24	-0,387	-19,34
1,4130	358,83	-0,020	-1,020

Tabla 12.2 Valores de la función $v(t) = 50 \sin(4t + 35^\circ)$ del ejemplo 13.1.

En la fig. 12.12 se dibuja la onda sinusoidal obtenida a partir de la tabla 12.2, así como algunos puntos notables sobre la curva. Se Observa que cuando $t = 0$, el valor de la magnitud de la onda no es cero.

c) La corriente en el resistor es:

$$v(t) = \frac{50}{10} \sin(4t + 35^\circ) = 5 \sin(4t + 35^\circ)$$

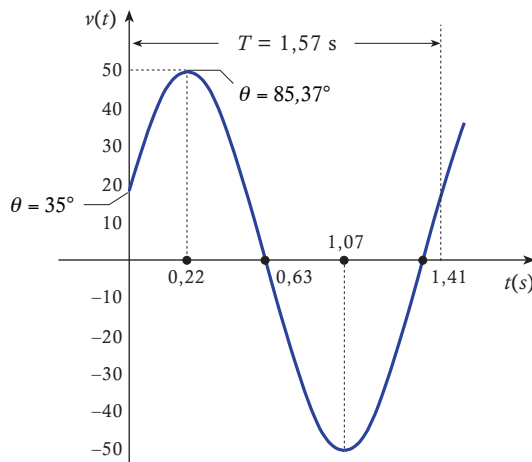


Fig. 12.12 Forma de onda para el ejemplo 13.1.

13.3.2 Suma y resta de fasores: para sumar dos fasores de igual frecuencia, se expresan los mismos en la forma cartesiana y se procede a sumar, por separado, las partes reales y las partes imaginarias. En forma parecida, se procede para la resta de dos fasores: se restan, por separado, las partes reales y las imaginarias.

Ejemplo 12.2

Dadas las dos ondas sinusoidales, represéntalas mediante fasores y, luego, procede a efectuar la suma de las mismas:

$$v_1(t) = 20 \sin(6t + 40^\circ) \quad v_2(t) = 10 \sin(6t - 10^\circ)$$

Solución

Los dos voltajes sinusoidales pueden ser representados mediante los fasores:

$$\mathbf{V}_1 = 20 \angle 40^\circ \quad \mathbf{V}_2 = 10 \angle (-10^\circ)$$

Pasando a la forma cartesiana:

$$\mathbf{V}_1 = 20 \cos 40^\circ + j20 \sin 40^\circ = 15,32 + j12,86$$

$$\mathbf{V}_2 = 10 \cos(-10^\circ) + j10 \sin(-10^\circ) = 9,85 - j1,74$$

Efectuando la suma de los fasores anteriores:

$$\mathbf{V} = 15,32 + j12,86 + 9,85 - j1,74 = 25,17 + j11,12$$

La relación anterior puede expresarse en módulo y ángulo como $\mathbf{V} = V \angle \varphi$, donde $\mathbf{V}$ y φ son:

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{25,17^2 + 11,12^2} = 27,52 \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{11,12}{25,17}\right) = 23,84^\circ \end{aligned} \right\} \mathbf{V} = 27,52 \angle 23,84^\circ$$

Para pasar de la forma polar al dominio del tiempo, conservamos el módulo del fasor e introducimos el ángulo de $23,84^\circ$ en el argumento de la función seno:

$$v(t) = 27,52 \sin(6t + 23,84^\circ)$$

12.3.3 Multiplicación y división de fasores: para realizar estas operaciones, es conveniente expresar los fasores en forma polar. Para multiplicar dos fasores, se multiplican sus módulos y se suman sus ángulos. Para dividir dos fasores, se dividen sus módulos y se restan sus ángulos.

Ejemplo 12.3

Determina el resultado de multiplicar y dividir los siguientes fasores:

$$\mathbf{I}_1 = 3 + j4 \quad \mathbf{I}_2 = 5 - j2$$

Solución

Convirtiendo los fasores a forma polar:

$$\mathbf{I}_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 5 \angle 53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \sqrt{5^2 + 2^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-2}{5}\right) = 5,39 \angle (-21,80^\circ)$$

Luego:

$$\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = 5 \cdot 5,39 \angle (53,13^\circ - 21,80^\circ) = 26,95 \angle 31,33^\circ$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{5 \angle 53,13^\circ}{5,39 \angle -21,80^\circ} = 0,93 \angle 74,93^\circ$$

12.5 VALOR PROMEDIO Y VALOR EFICAZ DE UNA ONDA ALTERNA SINUSOIDAL

Consideremos una corriente sinusoidal que circula a través de un resistor R , bajo la excitación de una fuente sinusoidal, como se muestra en la fig. 12.13. Como puede apreciarse, en un ciclo completo la corriente alcanza valores positivos entre 0° y 180° y entre 180° y 360° alcanza valores negativos. Es decir, en la mitad del tiempo las ondas de voltaje y corriente son positivas, mientras que en la otra mitad son negativas. Esto quiere decir que el promedio de ambas es igual a cero:

En una onda sinusoidal de la forma $V_m \sin \omega t$ el promedio en un ciclo completo es nulo.

Si denotamos los promedios de $v(t)$ e $i(t)$ como $\overline{v(t)}$ e $\overline{i(t)}$ tendremos:

$$\overline{v(t)} = \overline{V_m \sin \omega t} = 0 \quad (12.16)$$

$$\overline{i(t)} = \overline{I_m \sin \omega t} = 0 \quad (12.17)$$

La potencia instantánea disipada en el circuito es el producto del voltaje por la corriente que circula en el resistor:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (12.18)$$

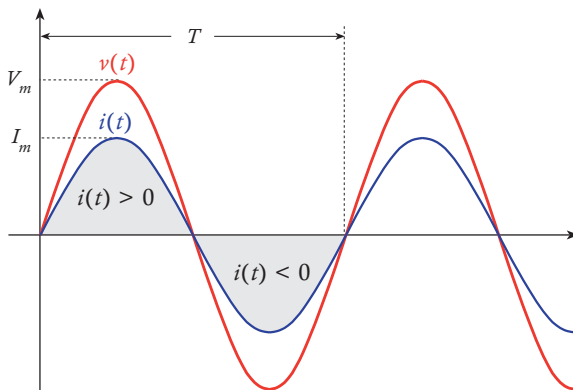


Fig. 12.13 El valor promedio de las ondas de corriente y voltaje es cero, ya que la mitad del tiempo la magnitud es positiva y la otra mitad es negativa.

Como $v(t) = Ri(t)$, la relación anterior queda como:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = Ri^2(t) \quad (12.19)$$

Ahora bien, puesto que los valores promedio de voltaje y corriente son nulos, ¿significa esto que la corriente disipada en el resistor es igual a cero? Quien haya tocado un bombillo incandescente, conectado a la corriente alterna residencial, sabe que esto no es así: el bombillo se calienta y disipa energía en forma de calor.

Esto también puede deducirse de la relación (12.19), donde la corriente $i(t)$ está elevada al cuadrado y sus valores instantáneos, tal como se revela en la fig. 12.14, no son nulos, salvo cuando $v(t)$ e $i(t)$ son iguales a cero simultáneamente.

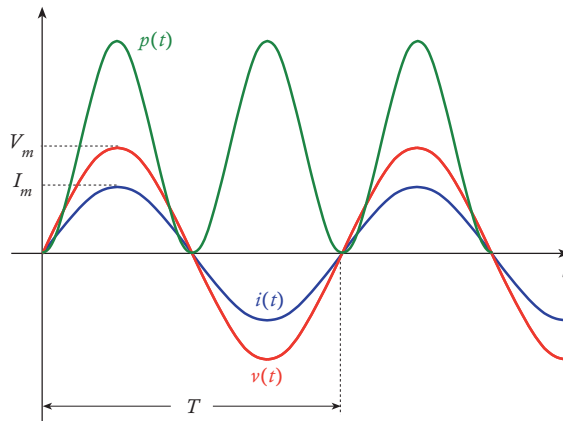


Fig. 12.14 Variación, en función de tiempo, de la potencia en un resistor excitado por una fuente sinusoidal. El valor promedio de la onda de potencia no es igual a cero.

Veamos cómo podemos calcular el valor promedio de la onda de potencia. La potencia instantánea puede ser expresada como:

$$p(t) = Ri^2(t) = RI_m^2 \sin^2 \omega t$$

La función $\sin^2 \omega t$ puede expandirse en la forma:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$$

La función $\cos 2\omega t$ es del tipo sinusoidal con promedio igual a cero. Entonces, si se toma el

promedio a $\overline{\sin^2 \omega t}$, obtenemos:

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \overline{\cos 2\omega t} = \frac{1}{2}$$

La potencia promedio disipada en el resistor, la cual usualmente se designa por la letra P , es, según la relación (13.18):

$$P = \overline{p(t)} = RI_m^2 \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} RI_m^2 \quad (12.20)$$

Se deduce, de la relación (12.20), que la potencia promedio disipada en un resistor, por el cual pasa una corriente sinusoidal de valor pico I_m , se puede considerar como el producto de la resistencia por una corriente continua, cuyo cuadrado es igual a $I_m^2/2$. A tal corriente se le conoce como *corriente efectiva*, *corriente eficaz* o *corriente rms* y su valor es:

$$I_e^2 = \frac{I_m^2}{2} \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m \quad (12.21)$$

En circuitos de corriente alterna sinusoidal es costumbre representar la corriente eficaz o el voltaje eficaz sin el subíndice que acompaña a la letra I , por lo cual podemos escribir:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m \quad (12.22)$$

El uso del voltaje y corriente eficaces se ha extendido en el tratamiento de redes eléctricas sometidas a la acción de fuentes de voltajes alternos sinusoidales. De forma tal, que cuando se habla de un voltaje alterno residencial de 110 voltios, nos estamos refiriendo a 110 voltios eficaces o rms. De igual manera, es usual tomar el valor eficaz para representar los fasores, correspondientes a voltajes y corrientes. En caso de necesitar el valor máximo de los mismos, simplemente se multiplica el valor eficaz por $\sqrt{2}$, tal como puede deducirse de la relación (12.22):

$$I_m = \sqrt{2} I \quad (12.23)$$

Similarmente, para el voltaje eficaz:

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot V_m \quad (12.24)$$

$$V_m = \sqrt{2} V = 1,414 \cdot V \quad (12.25)$$

Ejemplo 12.4

Cuando se hace referencia a la onda sinusoidal del voltaje alterno residencial se menciona una frecuencia de 60 Hz y una magnitud de 110 V. **a)** Expresa esta forma de onda en función del tiempo. **b)** Si ese voltaje se aplica a un bombillo de 100 W, ¿cuál es el valor de la corriente eficaz que circula por el mismo? ¿Cuál es su resistencia?

Solución

a) Posibles expresiones para esta onda son:

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad v(t) = V \sin \omega t$$

donde V_m es el valor pico de la onda y V es el valor rms. Como el valor rms es 110 V y la frecuencia está relacionada con la velocidad angular por la relación $\omega = 2\pi f$, $v(t)$ puede adoptar cualquiera de las formas siguientes:

$$v(t) = 110\sqrt{2} \sin 2\pi f t = 155,56 \sin 376,99t$$

$$v(t) = 110 \sin 376,99t$$

donde 155,56 es el valor máximo de la onda y 110 su valor efectivo.

b) Como $P = VI$ la corriente que circula por el bombillo es:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100 \text{ W}}{110 \text{ V}} = 0,91 \text{ A}$$

El valor de su resistencia se obtiene a partir de:

$$P = RI^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{100}{0,91^2} = 120,76 \Omega$$

En definitiva, para un circuito puramente resistivo, las relaciones a aplicar son las siguientes:

$$V_{rms} = RI_{rms} \quad (12.26)$$

$$P = V_{rms} I_{rms} = RI_{rms}^2 = \frac{V_{rms}^2}{R} \quad (12.27)$$

12.6 ONDA ALTERNA APLICADA A UN INDUCTOR

Consideremos un voltaje alterno sinusoidal aplicado a un inductor, como se indica en la fig. 12.15.

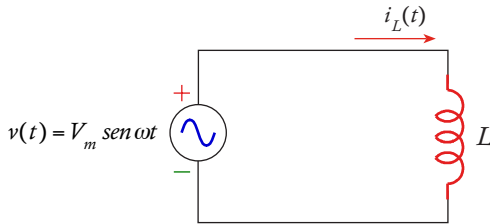


Fig. 12.15 Inductor excitado por un voltaje alterno sinusoidal.

Con ayuda del cálculo matemático, herramientas fuera del tratamiento de este texto, puede demostrarse que la corriente $i_L(t)$ en el circuito está dada por:

$$i_L(t) = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t \quad (12.28)$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos \omega t = -\sin(\omega t - 90^\circ)$$

la relación (12.28) se transforma en:

$$i_L(t) = \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) \quad (12.29)$$

Al comparar (12.29) con el voltaje aplicado, se observa que la onda de corriente está atrasada, con respecto a la onda de voltaje un ángulo de 90° . Si se dibujan las expresiones para el voltaje aplicado y la corriente que se genera en el circuito, se obtiene la fig. 12.16, donde claramente se observa el desfase de 90° . Es también válido afirmar que el voltaje adelanta a la corriente en un ángulo de 90° .

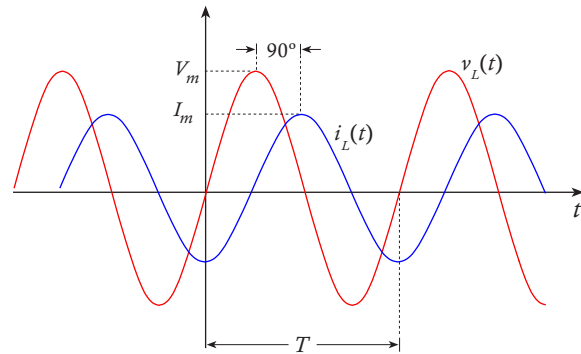


Fig. 12.16 En un inductor, la onda de voltaje está adelantada con respecto a la de corriente en un ángulo de 90° .

Para un inductor, los fasores correspondientes al voltaje y la corriente son:

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = V \angle 0^\circ$$

$$i_L(t) = \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{V}{\omega L} \angle -90^\circ$$

donde se han usado los valores efectivos o rms, V e I , en lugar de los valores máximos V_m e I_m para representar los fasores. La segunda relación anterior puede ser escrita como:

$$\mathbf{I} = I \angle -90^\circ \quad (12.30)$$

de donde se deduce:

$$I = \frac{V}{\omega L} \quad (12.31)$$

A la cantidad ωL se le conoce como *reactancia inductiva*, se expresa en ohms y se representa por la letra X_L :

$$X_L = \omega L \quad (12.32)$$

En la fig. 12.17, se muestra el diagrama fasorial del voltaje y la corriente en un circuito inductivo puro.

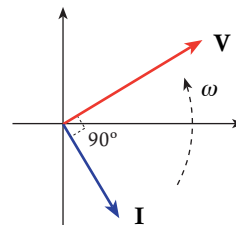


Fig. 12.17 Diagrama fasorial para un circuito formado por un solo inductor. El voltaje adelanta a la corriente 90° .

12.7 ONDA ALTERNA APLICADA A UN CIRCUITO RL. IMPEDANCIA.

El estudio de los circuitos con resistores o con inductores aislados nos permitió establecer una relación entre la onda en el dominio del tiempo y su correspondiente expresión fasorial, a la cual se le denomina *dominio de la frecuencia*, ya que la frecuencia de la onda está presente en base a su relación con la velocidad angular ($\omega = 2\pi f$).

Es posible transformar una red en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, teniendo en cuenta lo estudiado hasta ahora. Esta transformación facilita mucho el análisis de redes complejas excitadas por voltajes alternos sinusoidales. En el caso de un resistor, basta con sustituir los valores de voltajes y corrientes, en el dominio del tiempo, por los fasores que los representan. En la fig. 12.18 se muestra la transformación circuital.

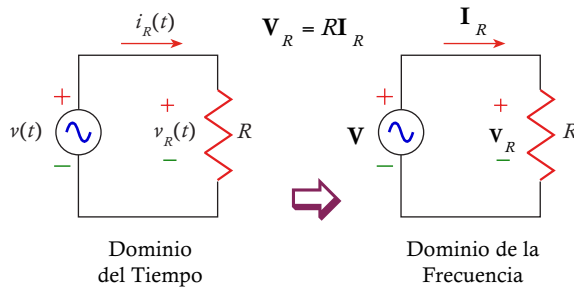


Fig. 12.18 Representación de una red puramente resistiva en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Con miras a representar una red puramente inductiva en el dominio de la frecuencia, consideremos la relación fasorial, ya deducida, entre la corriente y el voltaje en una red con un inductor:

$$I = \frac{V}{\omega L} \angle -90^\circ \quad (12.33)$$

Si despejamos el voltaje:

$$V = \frac{\omega L I}{\angle -90^\circ} = \omega L I \angle 90^\circ = \omega L (\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) I \quad (12.34)$$

Como $\cos 90^\circ = 0$ y $\sin 90^\circ = 1$, tenemos:

$$V = j\omega L I$$

Puesto que $V = V \angle 0^\circ$:

$$V_L = j\omega L I_L \quad (12.35)$$

Dado que la fórmula anterior establece un vínculo entre el voltaje y la corriente en el dominio de la frecuencia, podemos dibujar los circuitos de la fig. 12.19, donde se establece la relación con el dominio del tiempo.

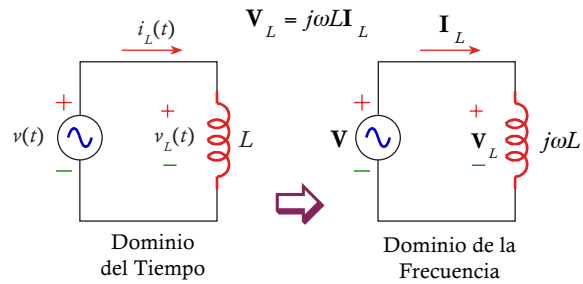


Fig. 12.19 Representación de una red puramente inductiva en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Las figs. (12.18) y (12.19) permiten fácilmente hacer operaciones cuando la excitación de una red es una onda alterna sinusoidal. Para ello:

1. Los voltajes y corrientes en el dominio del tiempo se convierten en fasores. Esto se simboliza de la siguiente manera:

$$v(t) \Leftrightarrow V \quad i(t) \Leftrightarrow I$$

2. Los resistores permanecen tal cual aparecen en el dominio del tiempo:

$$R \Leftrightarrow R$$

3. Los inductores, en el dominio de la frecuencia, se sustituyen por $j\omega L$:

$$L \Leftrightarrow j\omega L$$

Es relevante hacer notar que la relación (12.35) puede escribirse como:

$$V_L = \omega L I_L \angle 90^\circ \quad (12.36)$$

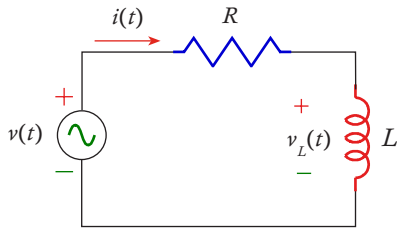


Fig. 12.20 Combinación R - L en el dominio del tiempo.

Veamos ahora cómo tratamos la red de la fig. 12.20, formada por la combinación en serie de un resistor y un inductor. Ambos elementos se conectan a una fuente de corriente alterna sinusoidal. La representación de esta red en el dominio de la frecuencia se presenta en la fig. 12.21. Como puedes notar, la inductancia L ha sido reemplazada por la reactancia inductiva $j\omega L$ y los voltajes y la corriente han sido sustituidos por los fasores $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}$. Esta sustitución permite usar las leyes equivalentes a la ley de Ohm y de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia. Así, tenemos:

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} \quad \mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I} \quad (\text{Ley de Ohm})$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} \quad (\text{Ley de Kirchhoff})$$

Si sacamos factor común al fasor $\mathbf{I}$ en la segunda relación anterior:

$$\mathbf{V} = (R + j\omega L)\mathbf{I} \quad (12.37)$$

vemos que el voltaje y la corriente están relacionadas con la cantidad compleja $R + j\omega L$. A tal cantidad se le denomina *impedancia* del circuito RL y se le denota por la letra $\mathbf{Z}$. Entonces:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L \quad (12.38)$$

La impedancia dada por (12.38) es un número complejo, dado en forma cartesiana, *cuya magnitud se expresa en ohms*. Para determinar su magnitud y su ángulo se utilizan las fórmulas:

$$\text{Magnitud: } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (12.39)$$

$$\text{Ángulo: } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (12.40)$$

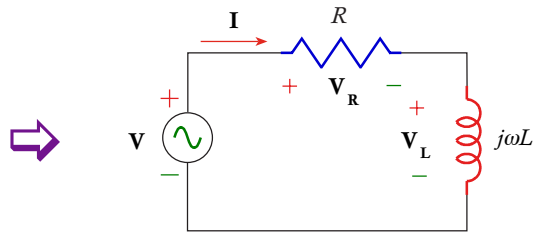


Fig. 12.21 Combinación R - L en el dominio de la frecuencia.

La corriente en el circuito se obtiene a partir de la relación (12.37):

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} \quad (12.41)$$

Ejemplo 12.5

Un resistor de $25 \, \Omega$ se conecta en serie a un inductor de $5 \, \text{mH}$. Si el conjunto es excitado por una fuente de voltaje de $30 \, \text{V rms}$ y $400 \, \text{Hz}$, determina: **a)** La expresión del voltaje aplicado en el dominio del tiempo. **b)** El fasor correspondiente al voltaje aplicado. **c)** La reactancia inductiva del inductor. **d)** La impedancia del circuito. **e)** La corriente resultante en la red. **f)** Los voltajes en el resistor y en el inductor. **g)** La expresión de la corriente resultante en el dominio del tiempo.

Solución

a) El voltaje pico y la velocidad angular del voltaje aplicado son:

$$V_m = \sqrt{2}V_{rms} = 1,4142 \cdot 30 = 42,43 \, \text{V}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,1416 \cdot 400 = 2.513,27$$

Luego, el voltaje aplicado puede ser expresado como:

$$v(t) = 42,43 \sin(2.513,27t)$$

b) El fasor correspondiente a $v(t)$ es:

$$\mathbf{V} = 30 \angle 0^\circ$$

c) La reactancia inductiva X_L se calcula a partir de:

$$X_L = \omega L = 2.513,27 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1.2,57 \, \Omega$$

d) La impedancia es, según la relación (12.38):

$$Z = R + j\omega L = 25 + j12,57$$

El módulo y ángulo de la impedancia son:

$$Z = \sqrt{25^2 + 12,57^2} = 27,98 \, \Omega$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12,57}{25}\right) = 26,69^\circ$$

Luego, la impedancia puede ser escrita en forma polar como:

$$Z = 27,98 \angle 26,69^\circ$$

e) La corriente en el circuito está dada por:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{30 \angle 0^\circ}{27,98 \angle 26,69^\circ} = 1,07 \angle (-26,69^\circ)$$

Del resultado obtenido anteriormente, se deduce que la corriente está retrasada, con respecto al voltaje, un ángulo de $26,69^\circ$.

f) El voltaje en R es:

$$V_R = RI = 25 \cdot [1,07 \angle (-26,69^\circ)] = 26,75 \angle (-26,69^\circ)$$

Según (12.36), $V_L = \omega LI \angle 90^\circ$:

$$V_L = \omega LI \angle 90^\circ = 12,57 \cdot [1,07 \angle (-26,69^\circ)] \cdot (\angle 90^\circ)$$

$$V_L = 13,45 \angle 63,31^\circ$$

De acuerdo con estos últimos resultados, podemos afirmar que el voltaje en la resistencia está retrasado $26,69^\circ$, con respecto al voltaje aplicado y que el voltaje en el inductor está adelantado $63,31^\circ$, con respecto a ese mismo voltaje aplicado.

g) Como $I = 1,07 \angle (-26,69^\circ)$, para obtener el valor de $i(t)$ multiplicamos el módulo por 1,4142 y añadimos el ángulo de $-26,69^\circ$ al argumento de la función seno. La frecuencia y la velocidad angular permanecen constantes:

$$i(t) = 1,51 \sin(\omega t - 26,69^\circ)$$

12.8 ONDA ALTERNA APLICADA A UN CAPACITOR

Consideremos ahora un circuito formado por una fuente de voltaje alterno y un capacitor, como el mostrado en la fig. 12.22.

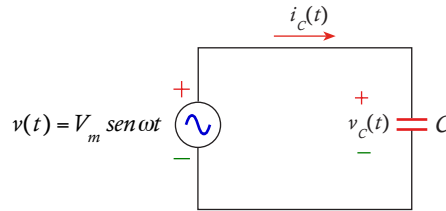


Fig. 12.22 Capacitor excitado por un voltaje alterno sinusoidal.

Haciendo uso del cálculo matemático, se demuestra que la corriente en el circuito viene dada por:

$$i_c(t) = \omega C V_m \cos \omega t \quad (12.42)$$

Si usamos, nuevamente, la identidad trigonométrica:

$$\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$$

obtenemos:

$$i_c(t) = \omega C V_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (12.43)$$

La relación obtenida muestra que la corriente en el capacitor está adelantada un ángulo de 90° , con respecto al voltaje aplicado. Es también válido decir que el voltaje está atrasado un ángulo de 90° con respecto a la corriente. Si se dibujan las ondas de voltaje y corriente en el circuito, se obtienen las curvas de la fig. 12.23.

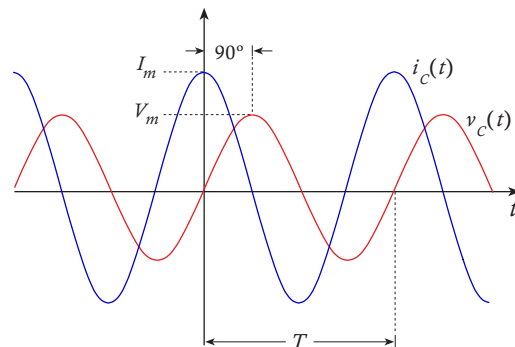


Fig. 12.23 En un capacitor la onda de corriente está adelantada con respecto a la de voltaje en un ángulo de 90° .

Escribamos los fasores correspondientes al voltaje y la corriente:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \sin \omega t & \Rightarrow & \mathbf{V} = V \angle 0^\circ \\ i_c(t) &= \omega C V_m \sin(\omega t + 90^\circ) & \Rightarrow & \mathbf{I} = \omega C V \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (12.44)$$

La segunda relación puede ser escrita como:

$$\mathbf{I} = I \angle 90^\circ \quad (12.45)$$

en la cual:

$$I = \omega C V \Rightarrow V = \frac{1}{\omega C} I \quad (12.46)$$

A $1/\omega C$ se le conoce como *reactancia capacitiva*, se expresa en ohms y se representa por la letra X_C :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (12.47)$$

El diagrama fasorial para este circuito se presenta en la fig. 12.24.

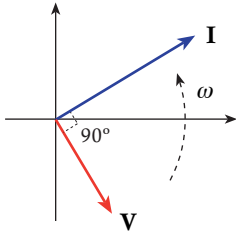


Fig. 12.24 Diagrama fasorial para un circuito formado por un solo capacitor. La corriente adelanta al voltaje 90° .

Para representar un capacitor en el dominio de la frecuencia, hacemos uso de las relaciones anteriormente establecidas. De (12.40):

$$V = \frac{1}{\omega C \angle 90^\circ} \mathbf{I} = \frac{1}{\omega C} \mathbf{I} \angle (-90^\circ) \quad (12.48)$$

$$V = \frac{1}{\omega C} [\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)] \mathbf{I} \quad (12.49)$$

Dado que $\cos(-90^\circ) = 0$ y $\sin(-90^\circ) = -1$, la relación (12.49) se reduce a:

$$V = -j \frac{1}{\omega C} \mathbf{I} \quad (12.50)$$

Como $\mathbf{V} = V \angle 0^\circ$, (12.50) puede escribirse como:

$$\mathbf{V}_C = -j \frac{1}{\omega C} \mathbf{I}_C \quad (12.51)$$

Si representamos el circuito en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia obtenemos la fig. 12.25. El capacitor C es sustituido, en el dominio de la frecuencia por la expresión $-j \frac{1}{\omega C}$.

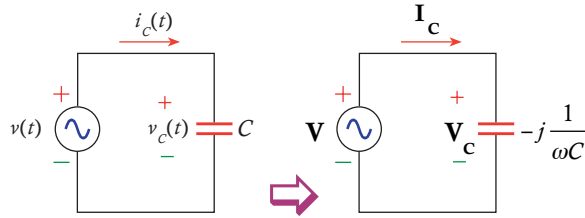


Fig. 12.25 Representación de una red puramente capacitiva en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

Otra forma de la relación (12.51) es la siguiente:

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{\omega C} \mathbf{I}_C \angle (-90^\circ) \quad (12.52)$$

Entonces, en el análisis de circuitos que contengan capacitores y estén sometidos a la acción de un voltaje alterno sinusoidal, éstos pueden ser reemplazados por la expresión $-j/\omega C$. El resto del análisis prosigue como si se tratase de una red resistiva.

Una vez establecidas las representaciones de los resistores, inductores y capacitores en el dominio de la frecuencia, es relativamente fácil obtener los valores de voltajes y corrientes, cuando la excitación es sinusoidal. En particular, las leyes de Kirchhoff pueden ser utilizadas para el análisis completo de las redes.

Si se tiene un circuito compuesto de un resistor en serie con un capacitor, como el mostrado en la fig. 12. 26, el voltaje aplicado al mismo puede expresarse como la suma de los voltajes en el resistor y el capacitor:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C = R\mathbf{I} - j \frac{1}{\omega C} \mathbf{I} = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) \mathbf{I} \quad (12.53)$$

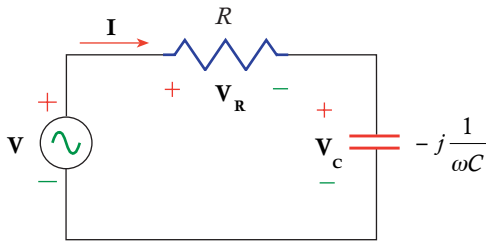


Fig. 12.26 Combinación $R - L$ en el dominio de la frecuencia.

La cantidad que figura entre paréntesis, en la expresión anterior, es la *impedancia del circuito*:

$$Z = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) \quad (12.54)$$

Como ya vimos, la impedancia es una cantidad compleja. Su módulo y ángulo para un circuito serie RC es:

$$\text{Magnitud: } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (12.55)$$

$$\text{Ángulo: } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{\omega RC} \right) \quad (12.56)$$

La corriente en el circuito es:

$$I = \frac{V}{R - j \frac{1}{\omega C}} \quad (12.57)$$

b) De acuerdo con (12.54) y tomando en cuenta el resultado anterior:

$$Z = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) = 1.500 - j2.652,58 \, \Omega$$

El módulo y ángulo de la impedancia son:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{1.500^2 + (2.652,58)^2} = 3.047,32 \, \Omega$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-2.652,58}{1.500} \right) = \tan^{-1}(-1,768) = -60,51^\circ$$

De acuerdo con los resultados anteriores, la impedancia puede expresarse de la forma:

$$Z = 3.047,32 \angle (-60,51^\circ)$$

c) La magnitud del voltaje de entrada está dada en valor rms y puede expresarse como:

$$V = 110 \angle 0^\circ$$

Según (12.57):

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110 \angle 0^\circ}{3.047,32 \angle (-60,51^\circ)} = 0,036 \angle 60,51^\circ \, A$$

Luego, la corriente tiene una magnitud de 36 mA y está adelantada $60,51^\circ$ con respecto al voltaje aplicado.

Ejemplo 12.6

Una fuente de voltaje de 110 V y 60 Hz se conecta a una combinación en serie de un resistor de 1.500 Ω y un capacitor de 10 μF . Determina: **a)** La reactancia inductiva del capacitor. **b)** La impedancia de la combinación en serie. **c)** La corriente en el circuito.

Solución

a) Según (12.47), la reactancia inductiva es:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 2.652,58 \, \Omega$$

12.9 ONDA ALTERNA APLICADA A UN CIRCUITO RLC EN SERIE

Veamos a continuación el caso más general de una red formada por un resistor, un inductor y un capacitor en serie, tal como la que se muestra en la fig. 12.27(a). El método fasorial, ya descrito, permite hacer un análisis de este tipo de circuito. Basta con sustituir el voltaje aplicado y la corriente en el circuito por los fasores correspondientes. Asimismo, los elementos pasivos, R , L y C , son sustituidos por R , $j\omega L$ y $-j/\omega C$, respectivamente. La red transformada se muestra en la fig. 12.27(b). A partir de la misma, puede determinarse el valor de la corriente y de los voltajes en cada uno de los componentes de la red.

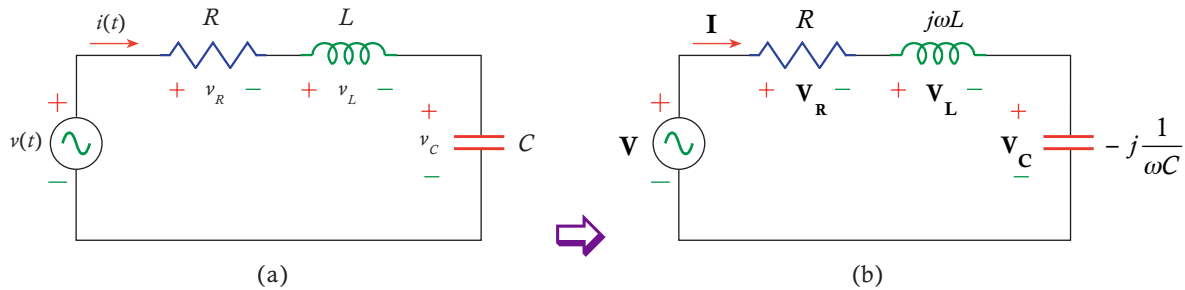


Fig. 12.27 Representación de una red $R - L - C$ en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

De acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, el voltaje aplicado a la red se reparte entre sus tres elementos:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} - j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} \quad (12.58)$$

Sacando $\mathbf{I}$ factor común:

$$\mathbf{V} = (R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C})\mathbf{I} \quad (12.59)$$

La relación entre el voltaje $\mathbf{V}$ y la corriente $\mathbf{I}$ es, por definición, la impedancia del circuito:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \quad (12.60)$$

cuyo módulo y ángulo son:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (12.61)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (12.62)$$

La relación (12.59) puede verse como una versión generalizada de la ley de Ohm, propia de los circuitos excitados por una señal alterna sinusoidal. Observa que la impedancia es un número complejo que depende de la resistencia presente en el circuito y de las reactancias inductiva ($X_L = j\omega L$) y capacitiva ($X_C = 1/j\omega C$) del circuito. El ángulo de fase, también depende de estas cantidades. Según la relación (12.57), si $X_L > X_C$, θ será positivo y el voltaje aplicado adelanta a la corriente. Si $X_L < X_C$, θ será negativo y la corriente adelanta al voltaje aplicado.

Ejemplo 12.7

Una fuente de voltaje de 110 V y 60 Hz se conecta a una combinación serie, consistente de un resistor de $91 \, \Omega$, un inductor de $0,25 \, \text{H}$ y un capacitor de $47 \, \mu\text{F}$. Determina: **a)** La impedancia del circuito. **b)** La corriente. **c)** El ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado. **d)** Los voltajes en cada uno de los elementos de la red. **e)** Dibuja un diagrama fasorial de voltajes y corrientes.

Solución

a) Las reactancias inductiva y capacitiva son:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 0,25 = 94,25 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 47 \cdot 10^{-6}} = 56,44 \, \Omega$$

Usando (12.60), (12.61) y (12.62) con $X = X_L - X_C$:

$$\mathbf{Z} = R + jX = 91 + j(94,25 - 56,44) = 91 + j37,81$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{91^2 + 37,81^2} = 98,54 \, \Omega$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{37,81}{91}\right) = 22,56^\circ$$

La impedancia se expresa en forma polar como:

$$\mathbf{Z} = 98,54 \angle 22,56^\circ$$

b) De acuerdo a (12.59) y tomando $\mathbf{V} = 110 \angle 0^\circ$:

$$\mathbf{I} = \frac{110 \angle 0^\circ}{98,54 \angle 22,56^\circ} = 1,17 \angle (-22,56^\circ)$$

c) El ángulo de fase, de acuerdo al resultado anterior es de $-22,56^\circ$, lo cual significa que la corriente está retrasada $22,56^\circ$ con respecto al voltaje.

e) Los voltajes en cada uno de los elementos son:

$$V_R = RI = 91 \cdot 1,17 \angle (-22,56^\circ) = 106,47 \angle (-22,56^\circ) \text{ V}$$

$$V_L = j\omega LI = (94,25 \angle 90^\circ) \cdot 1,17 \angle (-22,56^\circ) = 110,27 \angle 67,44^\circ \text{ V}$$

$$V_C = -j \frac{1}{\omega C} I = [56,44 \angle (-90^\circ)] \cdot 1,17 \angle (-22,56^\circ) = 66,03 \angle (-112,56^\circ) \text{ V}$$

Observa que si se sumaran los módulos de estos voltajes, el resultado sería mayor que el voltaje de 110 voltios aplicado al circuito ($109,47 + 110,27 + 66,03 = 282,77 \text{ V}$). En realidad, para obtener el voltaje aplicado es necesario hacer la suma vectorial de los fasores correspondientes a V_R , V_L y V_C (se deja esto como ejercicio).

e) En la fig. 12.28 se muestran los fasores envueltos en el circuito dado. Para hacer manejable el dibujo, los valores de las magnitudes no están a escala.

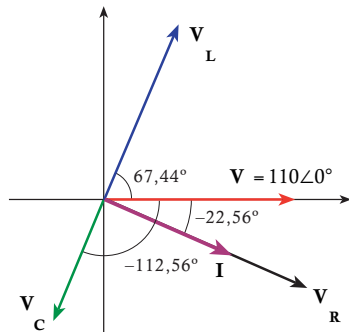


Fig. 12.28 Diagrama fasorial para el ejemplo 12.7.

El circuito serie RLC es un caso particular de una red eléctrica en la cual, como vimos, es posible aplicar las leyes básicas de análisis de circuitos. La aplicación de estas mismas leyes puede extenderse a redes más complejas conformadas por distintas combinaciones de elementos pasivos. Tal como apreciaremos en el ejemplo siguiente, el método de fasores es general para circuitos excitados por fuentes de voltaje alterno sinusoidal. La sustitución de la fuente aplicada y de los elementos constitu-

yentes de la red por su representación, en el dominio de la frecuencia, hace posible un tratamiento ágil en el análisis de la misma.

Ejemplo 12.8

Una fuente de voltaje de 110 V y 60 Hz se conecta a la red de la fig. 12.29. Si $R = 10 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$ y $C = 100 \mu\text{F}$, determina: **a)** La impedancia del circuito. **b)** La corriente en la fuente de voltaje. **c)** La corriente en cada elemento. **d)** El voltaje en cada elemento.

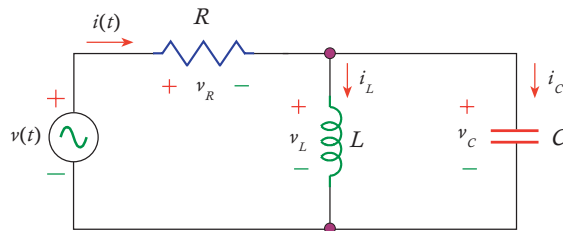


Fig. 12.29 Red para el ejemplo 12.8.

Solución

a) Las reactancias inductiva y capacitiva son:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 0,2 = 75,40 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 26,53 \Omega$$

El inductor y el capacitor pueden ser reemplazados en el dominio de la frecuencia por:

$$L \Leftrightarrow j75,40 \quad C \Leftrightarrow -j26,53$$

Estos reemplazos permiten dibujar la red de la fig. 12.30, en el dominio de la frecuencia.

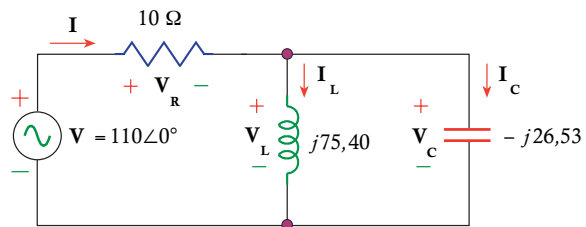


Fig. 12.30 Red para el ejemplo 13.6.

Como los elementos L y C están en paralelo, se combinación da lugar a la impedancia:

$$Z_1 = \frac{(j75,40) \cdot (-j26,53)}{j75,40 - j26,53} = \frac{2.000,36}{j48,87} = -j40,93 \, \Omega$$

donde se han usado las igualdades:

$$(j) \cdot (-j) = 1 \quad \frac{1}{j} = -1$$

La impedancia Z_1 está en serie con la resistencia R , por lo que la impedancia total entre los bornes de la fuente de voltaje es:

$$Z = R + Z_1 = 10 - j40,93$$

Pasando a la forma polar:

$$Z = R + Z_1 = 10 - j40,93 = 42,13 \angle (-76,27^\circ)$$

b) La corriente I en el circuito es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110 \angle 0^\circ}{42,13 \angle (-76,27^\circ)} = 2,61 \angle 76,27^\circ \, A$$

El resultado anterior indica que la corriente adelanta al voltaje aplicado en $76,27^\circ$. La expresión de la corriente en el dominio del tiempo es:

$$i(t) = 2,61 \cdot \sqrt{2} \sin(377t + 76,27^\circ)$$

$$i(t) = 3,69 \sin(377t + 76,27^\circ)$$

c) La corriente en la resistencia R es igual a la corriente en la fuente:

$$I_R = 2,61 \angle 76,27^\circ \, A$$

Podemos determinar V_L y V_C , usando un divisor de corriente, donde la corriente total I_R se divide entre el inductor y el capacitor. Si llamamos:

$$Z_L = j75,40 \quad Z_C = -j26,53$$

Se tiene:

$$I_L = \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} I = \frac{-j26,53}{j75,40 - j26,53} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$I_L = \frac{-j26,53}{j48,87} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$= \frac{26,53 \angle (-90^\circ)}{48,87 \angle 90^\circ} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ =$$

$$= 0,54 \angle (-180^\circ) \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$I_L = 1,41 \angle (-103,73^\circ)$$

$$I_C = \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} I = \frac{j75,40}{j75,40 - j26,53} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$I_C = \frac{j75,40}{j48,87} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$I_C = \frac{75,40 \angle 90^\circ}{48,87 \angle 90^\circ} \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ = 4,03 \angle 76,27^\circ$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, la corriente en el inductor tiene un valor rms de 1,41 A y está desfasada $-103,73^\circ$, con respecto al voltaje aplicado. La corriente en el capacitor tiene un valor rms de 4,03 A y está adelantada $76,27^\circ$, con respecto al voltaje aplicado.

d) Para los voltajes en cada elemento, podemos escribir:

$$V_R = RI = 10 \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ = 26,1 \angle 76,27^\circ \, V$$

$$V_L = j75,40 \cdot I_L = 75,40 \angle 90^\circ \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$V_L = 196,79 \angle 166,27^\circ$$

$$V_C = -j26,53 \cdot I_C = 26,53 \angle (-90^\circ) \cdot 2,61 \angle 76,27^\circ$$

$$V_C = 69,24 \angle (-13,73^\circ)$$

A partir de los voltajes calculados, se pueden escribir las expresiones de los voltajes en cada uno de los elementos de la red, en el dominio del tiempo:

$$v_R(t) = 36,91 \sin(377t + 76,27^\circ)$$

$$v_L(t) = 278,30 \sin(377t + 166,27^\circ)$$

$$v_C(t) = 97,92 \sin(377t - 13,73^\circ)$$

12.10 POTENCIA EN CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Cuando un voltaje alterno sinusoidal se aplica a un circuito que contiene resistores, inductores y capacitores se produce un proceso de transferencia de energía desde la fuente hacia esos elementos. En particular, *los elementos inductivos y capacitivos no disipan energía*, ya que durante la mitad de un ciclo de la corriente alterna se transfiere energía desde la fuente hacia los mismos, mientras que durante la otra mitad del ciclo la energía es devuelta hacia la fuente. Por el contrario, todo elemento resistivo presente en un circuito de corriente alterna sinusoidal disipa energía. Entonces, *son los resistores los únicos componentes de un circuito RLC los responsables por la pérdida de potencia en la red*.

Supongamos que se aplica un voltaje sinusoidal alterno a un circuito cualquiera y que este puede ser representado por:

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad (12.63)$$

Como consecuencia de la excitación a la que es sometida la red, surge de los terminales de la fuente una corriente dada por:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (12.64)$$

En las relaciones anteriores, V_m e I_m son los valores máximos de voltaje y corriente y φ es el ángulo de fase entre los mismos, el cual hemos supuesto precedido por signo negativo. La potencia instantánea suministrada por la fuente alterna es:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \quad (12.65)$$

Normalmente, en una red estamos interesados en el valor promedio de la potencia, en lugar del valor instantáneo. Para determinar el valor promedio de $p(t)$ hacemos uso de la identidad trigonométrica:

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi \quad (12.66)$$

Sustituyendo en (12.65):

$$p(t) = V_m I_m \sin^2 \omega t \cos \varphi - V_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi \quad (12.67)$$

Recordemos que las cantidades V_m , I_m y φ son constantes. El primer término de la relación (12.67)

tiene un valor promedio dado por:

$$\overline{V_m I_m \cos \varphi \sin^2 \omega t} = V_m I_m \cos \varphi \overline{\sin^2 \omega t} \quad (12.68)$$

Ya establecimos que el promedio de $\sin^2 \omega t = 1/2$. Por tanto:

$$\overline{V_m I_m \cos \varphi \sin^2 \omega t} = \frac{V_m I_m}{2} \quad (12.69)$$

Consideremos el segundo término de la relación (12.67). De nuestros estudios sobre Trigonometría, sabemos que:

$$\sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

El segundo término puede escribirse como:

$$V_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi = \frac{V_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t \quad (12.70)$$

Como $\sin 2\omega t$ alterna entre semiciclos positivos y negativos, su promedio es igual a cero:

$$\overline{\frac{V_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t} = 0 \quad (12.71)$$

Entonces, la potencia promedio de $p(t)$, a la cual designaremos por P es:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \varphi \quad (12.72)$$

Dado que los valores máximos y efectivos están relacionados mediante las fórmulas:

$$V_m = \sqrt{2}V \quad I_m = \sqrt{2}I$$

la relación (12.72) se transforma en:

$$P = VI \cos \varphi \quad (12.73)$$

Al ángulo φ se le conoce como *factor de potencia* del circuito y, de acuerdo a la relación (12.73), se puede afirmar:

La potencia promedio en un circuito de corriente alterna sinusoidal es igual al producto del voltaje y la corriente eficaz por el coseno del ángulo de fase.

Aun cuando la relación (12.73) se dedujo para la potencia promedio suministrada por la fuente de voltaje aplicada al circuito, la misma es completamente general y puede ser usada para obtener la potencia promedio en cualquier elemento o combinación de elementos de la red. En un resistor, la potencia disipada es:

$$P = VI \cos \varphi = (RI)I \cos \varphi = RI^2 \cos \varphi$$

Puesto que el ángulo entre el voltaje y la corriente en un resistor es igual a cero:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (12.74)$$

En un inductor o en un capacitor, el ángulo entre el voltaje y la corriente es de 90° y, por lo tanto, la potencia disipada en los mismos es nula.

Ejemplo 12.9

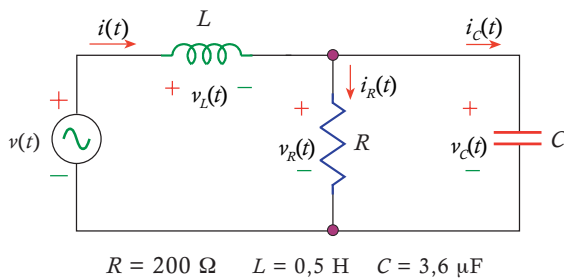
Para el circuito mostrado en la fig. 12.31, determina:
a) La corriente en el circuito, expresada en módulo y ángulo de fase. **b)** Los voltajes efectivos en cada elemento. **c)** La potencia entregada al circuito por la fuente. **d)** La potencia disipada en el circuito.

Solución

a) Las reactancias inductiva y capacitiva son:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 60 \cdot 0,5 = 188,50 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 3,6 \cdot 10^{-6}} = 736,83 \, \Omega$$



$$v(t) = 110\sqrt{2}\sin 377t$$

Fig. 12.31 Red para el ejemplo 12.9.

Cuando se pasa al dominio de la frecuencia, obtenemos la red de la fig. 12.32. Como puedes observar, la resistencia queda en paralelo con la reactancia capacitiva, por lo que su combinación de origen a la impedancia:

$$Z_P = \frac{200 \cdot (-j736,83)}{200 - j736,83}$$

Utilizando la forma polar para el numerador y el denominador de la fracción anterior:

$$Z_P = \frac{147,366 \angle (-90^\circ)}{763,49 \angle (-74,81^\circ)} = 193,02 \angle (-15,19^\circ)$$

Pasando a la forma rectangular:

$$Z_P = 186,28 - j50,58$$

La impedancia Z_P queda en serie con la resistencia R y la impedancia equivalente total es:

$$Z = j188,50 + 186,28 - j50,58 = 186,28 + j137,92 \, \Omega$$

Pasando a la forma polar:

$$Z = 231,78 \angle 36,52^\circ$$

Como $V = 110 \angle 0^\circ$, la corriente en el circuito es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110 \angle 0^\circ}{231,78 \angle 36,52^\circ} = 0,47 \angle (-36,52^\circ)$$

resultado que establece el retraso de la corriente en $36,52^\circ$, con respecto al voltaje. En función del tiempo la corriente está dada por:

$$i(t) = 0,47\sqrt{2}\sin(377t - 36,52^\circ)$$

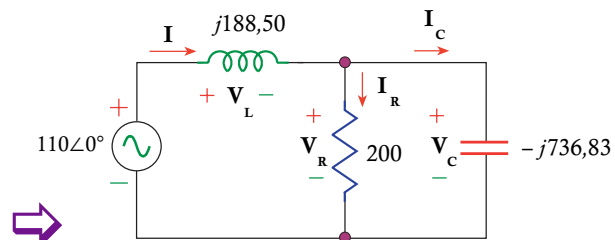


Fig. 12.32 Red en el dominio de la frecuencia para el ejemplo 13.7.

b) Voltaje en el inductor:

$$\mathbf{V}_L = (188,50 \angle 90^\circ) \cdot 0,47 \angle (-36,52^\circ) = 88,60 \angle 53,48^\circ$$

Pasando a la forma rectangular:

$$\mathbf{V}_L = 88,60 \cos 53,48^\circ + j88,60 \sin 53,48^\circ$$

$$\mathbf{V}_L = 52,73 + j71,20$$

El voltaje en el resistor es el mismo del capacitor y es igual a la diferencia entre el voltaje aplicado y el del inductor:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_R = \mathbf{V}_C = \mathbf{V} - \mathbf{V}_L = 110 - (52,73 + j71,20)$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_C = 57,27 - j71,20 = 91,37 \angle (-51,19^\circ)$$

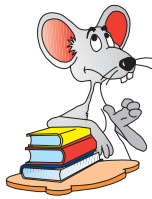
c) La potencia entregada por la fuente es el producto de su voltaje (110 V), la corriente en el circuito y el coseno del ángulo de desfase ($-36,52^\circ$):

$$P = VI \cos \theta = 110 \cdot 0,47 \cos(-36,52^\circ) = 41,55 \text{ W}$$

d) El resistor disipa una potencia igual a:

$$P_R = RI^2 = 200 \cdot 0,47^2 = 44,18 \text{ W}$$

Observa que este valor se aproxima a la potencia suministrada por la fuente. En realidad estos dos valores tienen que ser exactamente iguales, ya que sólo el resistor disipa energía en el circuito. La aproximación en los cálculos es la causa de esta disparidad en los números.



PIENSA Y EXPLICA



12.1 ¿Qué importancia puedes atribuirle a la corriente alterna sinusoidal? ¿Qué características tiene este tipo de onda? Define período, ciclo, frecuencia y valor pico de una onda sinusoidal.

12.2 ¿Cuál es el origen de la onda sinusoidal de voltaje de nuestros hogares?

12.3 Escribe la expresión matemática para una onda alterna sinusoidal.

12.4 ¿Cuál es la amplitud, la frecuencia, la velocidad angular y el período de la onda de voltaje sinusoidal que llega a nuestras residencias? ¿Qué significan estos valores?

12.5 ¿A qué se denomina valor eficaz de una onda sinusoidal? ¿Cuál es este valor para el voltaje residencial?

12.6 Explica cómo un vector rotatorio puede dar origen a una onda sinusoidal. Para esto, haz uso de la fig. 12.6.

12.7 Define fase y ángulo de fase para una onda periódica.

12.8 Analiza la respuesta de un resistor sometido a la excitación de una onda alterna sinusoidal. Refiérete a las figs. 12.8 y 12.9.

12.9 ¿Qué es un fasor? ¿Cómo pueden usarse los fasores para generar y representar voltajes y corrientes en un circuito eléctrico?

12.10 ¿Cómo se representa matemáticamente un fasor, mediante la expresión cartesiana y la expresión polar?

12.11 Explica las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fasores.

12.12 ¿Cuál es el valor promedio y el valor eficaz de una onda alterna sinusoidal? ¿Cómo se determinan esos valores? Deduce la fórmula para el valor eficaz.

12.13 ¿A qué se denomina reactancia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva? ¿En qué unidades se expresan?

12.14 ¿Cuándo hablamos del dominio del tiempo y dominio de la frecuencia en una red eléctrica? Da ejemplos de expresiones en ambos dominios para una señal alterna sinusoidal

12.15 Deduce la relación entre voltaje y corriente de un inductor. ¿Cuál es la diferencia de fase entre el voltaje y la corriente?

12.16 ¿Cuál es la expresión para la impedancia en un circuito RL en serie? ¿Es la impedancia un número complejo? ¿Cuáles son su módulo y magnitud? ¿En qué unidad se expresa?

12.17 Deduce la relación entre voltaje y corriente en un capacitor. ¿Cuál es la diferencia de fase entre los mismos?

12.18 ¿Cuál es la expresión para la impedancia en un circuito RC en serie? ¿Cuáles son su módulo y magnitud?

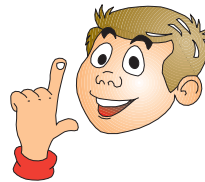
12.19 ¿Cuál es la expresión para la impedancia en un circuito RLC en serie? ¿Cuáles son su módulo y magnitud?

12.20 Deduce la expresión para la potencia promedio, suministrada por una fuente alterna sinusoidal a un circuito.

12.21 ¿Cuáles son los valores de la potencia promedio en los resistores, inductores y capacitores de una red eléctrica?



PROBLEMAS



12.1 En Europa, el valor efectivo y la frecuencia de la onda alterna sinusoidal en industrias y residencias son de 220 V y 50 Hz, respectivamente. **a)** ¿Cuáles son la velocidad angular del generador que produce la onda y el período de la misma? **b)** ¿Cuál es el valor pico de la onda?

12.2 Una fuente de voltaje que alimenta a una carga resistiva de 91Ω se expresa mediante la relación $v = 156 \sin(377t + 45^\circ)$. **a)** ¿Cuál es la fase de la onda aplicada? **b)** ¿Cuál es el valor rms de la corriente en la carga? **c)** ¿Cuál es la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje aplicado?

12.3 Un circuito de corriente alterna sinusoidal consta de un solo resistor de valor 75Ω . Si el valor pico de la onda es de 90 V , la frecuencia es de 60 Hz y el valor instantáneo del voltaje es $v_R = 0$, cuando $t = 0$, determina: **a)** El valor de la máxima corriente en el resistor. **b)** La velocidad angular del generador que produce la onda.

12.4 Representa las siguientes funciones sinusoidales como fasores:

a) $v(t) = 30 \text{sen}(\omega t + 20^\circ)$

b) $v(t) = 10 \text{sen} 140t$

c) $i(t) = 155 \text{sen}(141t - 75^\circ)$

12.5 Si la frecuencia de una onda sinusoidal alterna es de 60 Hz determina, a partir de los fasores dados, la expresión de la misma en el dominio del tiempo:

a) $V = 125 \angle 0^\circ$ **b)** $V = 30 \angle -40^\circ$

c) $V = 100 \angle 180^\circ$ **d)** $V = 24 + j42$

e) $V = -18 + j12$ **f)** $V = 10 - j16$

12.6 Se aplica el siguiente voltaje sinusoidal a un circuito puramente resistivo:

$$v(t) = 10 \text{sen}(377t - 45^\circ)$$

a) Escribe el fasor que representa a $v(t)$. **b)** Si $R = 22 \Omega$, ¿cuál es la expresión de la corriente en el resistor, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia? **c)** ¿Cuál es el valor de I_{rms} ?

12.7 Dadas las corrientes:

$$i_1(t) = 25 \text{sen}(377t - 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 8 \text{sen}(377t + 60^\circ)$$

representálas mediante fasores y efectúa su suma. Expresa el resultado en el dominio del tiempo.

12.8 Determina el resultado de multiplicar y dividir los siguientes fasores:

a) $V = 110 \angle 0^\circ$ $Z = 87 \angle -62^\circ$

b) $V = 110 \angle -22^\circ$ $Z = 3 + j8$

12.9 La frecuencia de una onda de voltaje alterno sinusoidal es de 100 Hz y su valor rms es de 48 V . **a)** Expresa esa onda en función del tiempo. **b)** Si ese voltaje se aplica a un resistor de 18Ω , ¿qué corriente eficaz circula por el mismo?

12.10 Un voltaje de 110 V y 60 Hz se aplica a un inductor de 100 mH . **a)** ¿Cuál es su reactancia inductiva? **b)** Determina la corriente en el inductor. **c)** ¿Cuál es la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje aplicado?

12.11 En un circuito puramente inductivo se obtiene una corriente máxima de 2 A , cuando el voltaje aplicado tiene un valor pico de 50 V a una frecuencia de 60 Hz . **a)** ¿Cuál es el valor de la inductancia? **b)** Si se desea reducir la corriente pico a $0,75 \text{ A}$, ¿cuál deberá ser el valor de ω ?

12.12 Un resistor de 40Ω se conecta en serie con un inductor de 10 mH . Si el conjunto es excitado por una fuente de $f = 100 \text{ Hz}$ y voltaje pico 50 V , determina: **a)** La expresión del voltaje aplicado en el dominio del tiempo. **b)** El fasor correspondiente al voltaje aplicado. **c)** La reactancia inductiva del inductor. **d)** La impedancia del circuito. **e)** La corriente en la red. **f)** Los voltajes en el resistor y en el inductor. **g)** La expresión de la corriente resultante en el dominio del tiempo. **h)** El valor de la corriente para $1/4$ de período.

12.13 Un inductor de 20 mH se conecta en serie con un resistor de 10 Ω . La frecuencia de la fuente que se aplica a la red en serie se varía hasta que el voltaje adelante a la corriente en un ángulo de 30°. **a)** ¿A qué frecuencia ocurre esto? **b)** ¿Cuál es el valor de la impedancia del circuito a esa frecuencia? **c)** ¿Cuál es el factor de potencia? **d)** Si $V_m = 20$ V, ¿qué potencia entrega la fuente al circuito? **e)** ¿Qué potencia se disipa?

12.14 Un capacitor de 10 μ F es conectado a una fuente de voltaje de 110 V eficaces y frecuencia de 60 Hz. **a)** ¿Cuál es la reactancia capacitiva del capacitor? **b)** Determina el valor de la corriente rms que circula por el capacitor. **c)** ¿Cuál es la carga máxima que aparece en el capacitor?

12.15 Un resistor de 120 Ω se conecta en serie a un capacitor de 4,7 μ F. La red es excitada por una fuente de 200 V a 60 Hz. **a)** ¿Cuál es la reactancia capacitiva del capacitor? **b)** ¿Cuál es la impedancia de la combinación en serie? **c)** Expresa la corriente del circuito en los dominios del tiempo y de la frecuencia. **c)** ¿Cuál es el factor de potencia? **d)** ¿Qué potencia entrega la fuente? **e)** ¿Qué energía se disipa?

12.16 Se tiene un circuito serie, cuyos elementos tienen los siguientes valores: $R = 100 \Omega$, $L = 500$ mH y $C = 6,8 \mu$ F. Si la fuente de excitación tiene un valor rms de 180 V y una frecuencia de 60 Hz, calcula: **a)** La reactancia inductiva. **b)** La reactancia capacitiva. **c)** La impedancia. **d)** La diferencia de fase entre la corriente y el voltaje. **e)** La corriente en el circuito. **f)** La potencia entregada por la fuente. **g)** La potencia disipada en el circuito.

12.17 En las redes mostradas en la fig. 12.33, $R = 100 \Omega$, $L = 0,3$ H, $C = 4,7 \mu$ F, $V_m = 156$ y $f = 60$ Hz. Determina: **a)** La impedancia del circuito entre los terminales de la fuente. **b)** La corriente en la fuente. **c)** La corriente en cada elemento. **d)** El voltaje en cada elemento. **e)** La potencia disipada en el circuito.

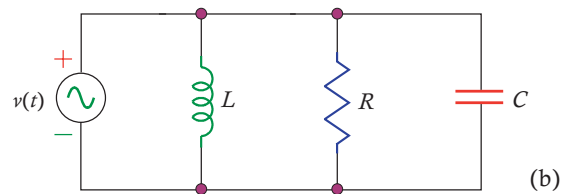
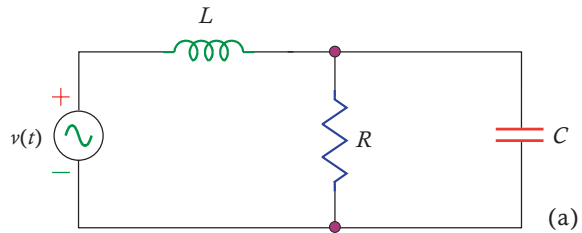


Fig. 12.33 Redes para el problema 12.17.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alonso, M. y Finn, Edward. *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley. 1967.
2. Alvarenga, B y Máximo, A. *Física General*, Editorial Harla. 1983.
3. Beiser, Arthur. *Física Aplicada*, McGraw-Hill. 1990.
4. Figuera Y. Júpiter, *Física 9° Grado*, Colegio Bolivariana, Caracas. 2000.
5. Figueroa, Douglas. *Cinemática, Física para Ciencias e Ingeniería*. 1998.
6. _____ *Las Interacciones Electromagnéticas (Electrostática)*, CENAMEC.
7. Gettys W., Keller F, y Skove M. *Física Clásica y Moderna*, Mc Graw Hill. 1991.
8. Giancoli, Douglas. *Física General*, Prentice Hall Hispanoamericana. 1988.
9. Halliday, D, y Resnick R. *Fundamentos de Física*, C.E.C.S.A. 1980
10. Hecth, Eugene. *Física 2*, Thomson Editores. 1999.
11. Hewitt, Paul. *Conceptual Physics*, Addison Wesley. 1997.
12. Lea, S y Burke J. *Física: La Naturaleza de las Cosas*, Thomson Editores. 1998
13. MacDonald, S, y Burns, D. *Física para las Ciencias de la Vida y de la Salud*, Fondo Educativo Interamericano. 1978.
14. Orear, Jay. *Física Fundamental*, Editorial Limusa. 1971.
15. Reese Ronald, *Física Universitaria*, Editorial Thomson. 2002.
16. Sears, Francis. *Fundamentos de Física*, Editorial Aguilar. 1971.
17. Serway A. Raymond. *Física*, Tomos I y II, McGraw-Hill. 1998.
18. Serway R. y Bechner R. *Física para Ciencias e Ingeniería*, Mc Graw Hill. 2002.
19. Tipler, Paul. *Física para la Ciencia y la Tecnología*, Tomo II, Editorial Reverté. 2000.
20. Tippens, Paul. *Física Conceptos y Aplicaciones*, Mac. Graw Hill. 2001.
21. Wilson, Jerry. *Física*, Prentice Hall. 1996

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

- 2.1 a) $75 \cdot 10^8$ b) $125 \cdot 10^{11}$
- 2.2 $2,30 \cdot 10^{-10}$ N
- 2.3 Fuerza sobre $q_2 = 2,16 \cdot 10^{-4} \vec{i}$ N
Fuerza sobre $q_3 = -3,67 \cdot 10^{-4} \vec{i}$ N
- 2.4 $q_2 = 1,11 \cdot 10^{-8}$ C
- 2.5 17,5 cm de q_2
- 2.6 $\vec{F}_R = 1,8\vec{i} + 2,25\vec{j} = (2,88 \text{ N}; 51,34^\circ)$
- 2.7 Módulo: 3 Ángulo: $138,92^\circ$
- 2.8 $\frac{3}{8} F$
- 2.9 $q_1 = 1,71 \mu\text{C}$ o $q_2 = -0,52 \mu\text{C}$
- 2.10 $F_R = 6,90$ N $\theta = 225^\circ$
- 2.11 $y = 4,25$ m de la carga q_2
- 2.12 $F_R = 200,64$ N $\theta = 6,54^\circ$
- 3.1 $6,4 \cdot 10^{-15}$ N
- 3.2 Magnitud: $55,74 \cdot 10^{-12}$ N/C
Dirección: opuesta a la fuerza de gravedad.
- 3.3 Distancia a Q_1 : $(\sqrt{2} - 1)L$
- 3.4 Distancia a Q_1 : $(1 + \sqrt{2})L$
- 3.5 $95,46 \cdot 10^5$ N/C
- 3.6 $\vec{E} = \frac{18}{64} \vec{i}$ N/C
- 3.7 $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{4}$
- 3.8 $q_1 = 3,69 \cdot 10^{-9}$ C $q_2 = 0,41 \cdot 10^{-9}$ C
- 3.9 La configuración (b).
- 3.10 1,41 m
- 3.11 $E = 3,26$ N/C $\phi = 63,90^\circ$
- 3.12 Peso = $41,06 \cdot 10^{-15}$ kg
Electrones en exceso: 513
- 3.13 a) q_1 positiva, q_2 negativa
b) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{15}{9}$
c) El campo es mayor alrededor de q_1 .
- 3.14 $E = \sigma/\epsilon$
- 3.15 $F_A = 80 \cdot 10^{-19}$ N $F_B = 40 \cdot 10^{-19}$ N
- 3.16 Magnitud = 3,6 N
Dirección: perpendicular a la línea. Se aleja de ella.
- 3.17 Magnitud: 28,3 N
Dirección: Perpendicular a la línea. Se acerca a ella.
- 3.18 8 m
- 3.19 $4,26 \cdot 10^{-7}$ s
- 3.20 $E = 4k \frac{\lambda}{r}$ r : distancia al punto medio
- 3.21 $x = 1,25$ m de la lámina
- 3.22 a) $4,39 \cdot 10^{13}$ m/s² b) $5 \cdot 10^{-8}$ s
c) 5,49 cm d) $2,20 \cdot 10^4$ m/s
- 3.23 a) 0,23 m b) $0,22 \cdot 10^{-6}$ s c) 1,52 m
- 3.24 a) $\phi = 5.000$ Nm²/C b) $\phi = 0$
c) $\phi = 5.000$ Nm²/C d) $\phi = 0$.
- 3.25 a) 50 Nm²/C b) 43,3 Nm²/C
- 3.26 a) 0 b) $k \frac{Q}{r^2}$ c) 0

- 3.27 a) $\frac{4}{3}\pi kpr$ b) $k\frac{Q}{r^2}$
- 3.28 a) $4,5 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ b) $2,25 \cdot 10^8 \text{ N/C}$
- 4.1 $\Delta U_{AB} = -10^{-3} \text{ J}$
- 4.2 $v = 1,96 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
- 4.3 a) $\Delta E_c = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ b) $v = 4,38 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
- 4.4 $E = 710,94 \text{ N/C}$
- 4.5 $q = 0,5 \cdot 10^{-18} \text{ C}$
- 4.6 $v = 2,81 \cdot 10^7 \text{ m/s}$
- 4.7 a) $\vec{E} = 1,13 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ N/C}$
 b) $V_{AB} = -0,45 \cdot 10^5 \text{ V}$ c) $W = 0,045 \text{ J}$
 d) $\Delta U_{BA} = 0,045 \text{ J}$ e) $W_{\text{campo}} = 0,045 \text{ J}$
- 4.8 a) $W_{BA} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ b) $W_{AB} = -9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$
- 4.9 a) $V_{AB} = -44,79 \text{ V}$
 b) V_A está a un potencial mayor que V_B
- 4.10 a) $\Delta U_{OP} = -0,20 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ b) $V_{OP} = -20 \text{ V}$
- 4.11 $V = 1,8 \cdot 10^5 \text{ V}$
- 4.12 $r = 90 \text{ cm}$
- 4.13 $V_p = 2.445,90 \text{ V}$
- 4.14 $W = -6,04 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
- 4.15 a) $W_{AC} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ b) $W_{AC} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
 c) $\Delta U_{AC} = -7,2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- 4.16 a) $V = 14,04 \cdot 10^5 \text{ V}$ b) $W = -8,1 \text{ J}$
- 4.17 El campo es nulo a 72,43 cm a la izquierda de Q_1 o a 102,43 cm a la izquierda de Q_2 .
 El potencial es nulo a 10 cm de Q_1 o a 20 cm de Q_2 .
- 4.18 El campo es nulo a 16,51 cm de Q_1 . El potencial no se anula en ningún punto, por ser las cargas del mismo signo.
- 4.19 $V_p = 56.000 \text{ V}$
- 4.20 a) $V = -90 \cdot 10^3 \text{ V}$ b) $W = -27 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
 c) El sistema de cargas provee la energía necesaria para llevar a las esferas a la posición que ocupan.
- 5.1 $Q = 2,4 \text{ nC}$
- 5.2 a) $C = 0,354 \text{ pF}$ b) $Q = 3,19 \cdot 10^{-12} \text{ C}$
 c) $U = 14,36 \cdot 10^{-12} \text{ J}$
- 5.3 a) $C = 5 \text{ pF}$ b) $V = 40 \text{ V}$
- 5.4 $R = 1,59 \text{ cm}$
- 5.5 $Q = 300 \mu\text{C}$
- 5.6 a) $C = 100 \text{ pF}$ b) $\sigma = 1,59 \mu\text{C/m}^2$
- 5.7 $A = 1,69 \text{ cm}^2$
- 5.8 a) $C = 0,44 \text{ pF}$ b) $E = 12.000 \text{ V/m}$
 c) $Q = 5,28 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ d) $\sigma = 1.056 \mu\text{C/m}^2$
- 5.9 $A = 774 \text{ m}$
- 5.10 $C = 1.112,12 \text{ pF}$
- 5.11 $C = 253,07 \text{ pF}$
- 5.12 $C = 442,50 \text{ pF}$
- 5.13 a) $E_o = 10^5 \text{ V/m}$; $Q_o = 17,7 \text{ nC}$;
 $U_o = 8,85 \cdot 10^{-7} \text{ J}$
 b) $E = 2,86 \cdot 10^4 \text{ V/m}$; $Q = 17,7 \cdot 10^{-9} \text{ C}$
 $V = 28,57 \text{ V}$
- 5.14 $Q_1 = 0,95 \mu\text{C}$ $Q_2 = 19,05 \mu\text{C}$
- 5.15 $a = 1,28 \text{ cm}$
- 5.16 a) $U_1 = 10^{-3} \text{ J}$ b) $U_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
- 5.17 a) $V = 1,67 \text{ V}$ b) $\Delta U = 103,33 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- 5.18 a) $C_{\text{equivalente}} = 54 \text{ pF}$
 b) $Q_1 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ $Q_2 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$

$$Q_3 = 50 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$\text{c) } U_1 = 0,4 \cdot 10^{-8} \text{ J} \quad U_2 = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

$$U_3 = 25 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

5.19 Figura 5.21(a):

$$\text{a) } C_{\text{equivalente}} = 5,96 \text{ pF}$$

$$\text{b) } Q_1 = 5,96 \cdot 10^{-10} \text{ C} \quad Q_2 = 1,75 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$Q_3 = 1,75 \cdot 10^{-10} \text{ C} \quad Q_4 = 4,21 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$\text{c) } U_1 = 89,04 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad U_2 = 10,2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$U_3 = 51 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad U_4 = 148 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Figura 5.21(b):

$$\text{a) } C_{\text{equivalente}} = 20 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\text{b) } Q_1 = 160 \text{ } \mu\text{C} \quad Q_2 = 80 \text{ } \mu\text{C}$$

$$Q_3 = 80 \text{ } \mu\text{C} \quad Q_4 = 160 \text{ } \mu\text{C}$$

$$\text{c) } U_1 = 1.600 \text{ } \mu\text{J} \quad U_2 = 640 \text{ } \mu\text{J}$$

$$U_3 = 160 \text{ } \mu\text{J} \quad U_4 = 1.600 \text{ } \mu\text{J}$$

$$5.20 \quad C_{\text{equivalente}} = \frac{\kappa_1 + 1}{2} C_o$$

$$6.1 \quad v_d = 0,294 \text{ cm/s}$$

$$6.2 \quad \text{a) } q = 1.500 \text{ C}$$

$$\text{b) } N = 9.375 \cdot 10^{18} \text{ electrones}$$

$$6.3 \quad v_d = 0,22 \text{ mm/s}$$

$$6.4 \quad J = 158,52 \text{ A/m}^2$$

$$6.5 \quad \text{a) } q = 0,12 \text{ C} \quad \text{b) } P = 0,15 \text{ mW}$$

$$6.6 \quad \text{a) } I = 30 \text{ mA} \quad \text{b) } q = 54 \text{ C}$$

$$6.7 \quad \text{a) } R = 0,11 \text{ } \Omega \quad \text{b) } R = 0,068 \text{ } \Omega$$

$$6.8 \quad l = 12,1 \text{ m}$$

$$6.9 \quad \text{a) } R = 20,83 \text{ } \Omega \quad \text{b) } I = 5,28 \text{ A}$$

$$\text{c) } P = 119,98 \text{ W} \quad \text{d) } P = 580,70 \text{ W}$$

$$6.10 \quad \text{a) } R = 0,467 \text{ } \Omega \quad \text{b) } J = 1,43 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$$

$$6.11 \quad l = 150 \text{ m}$$

$$6.12 \quad I = 0,27 \text{ A}$$

$$6.13 \quad l = 1,08 \text{ m}$$

$$6.14 \quad \text{a) } R_{70} = 0,032 \text{ } \Omega \quad \text{b) } \Delta I = 17,5 \text{ A}$$

$$6.15 \quad R = 19,44 \text{ } \Omega$$

$$6.16 \quad V = 28,28 \text{ V}$$

$$6.17 \quad \text{a) } I = 6,55 \text{ A} \quad \text{b) } R = 16,79 \text{ } \Omega$$

$$6.18 \quad \text{a) } q = 72.000 \text{ C} \quad \text{b) } P = 120 \text{ W}$$

$$\text{c) } U = 864.000 \text{ J}$$

$$6.19 \quad \text{a) } U = 2,64 \text{ kWh}$$

$$\text{b) } \text{Gasto mensual} = \text{Bs. } 712,8$$

$$6.20 \quad \text{Energía} = 720.000 \text{ J} = 172.800 \text{ cal}$$

$$6.21 \quad \text{a) } I = 13,64 \text{ A} \quad \text{b) } t = 1 \text{ h } 51,6 \text{ min}$$

$$6.22 \quad \text{a) } I = 2,71 \text{ A}$$

$$\text{b) } \text{Energía consumida} = 22,38 \text{ kWh}$$

$$\text{c) } \text{Costo mensual} = \text{Bs. } 2.014,20$$

$$7.1 \quad \text{a) } 0,4455 \text{ A} \quad \text{b) } 0,0396 \text{ W}$$

$$7.2 \quad \text{a) } 4,0090 \text{ W} \quad \text{b) } 4,0095 \text{ W}$$

$$\text{c) } 8,91 \text{ V}$$

$$7.3 \quad \text{a) } 5 \text{ } \Omega \quad \text{b) } V_{R_1} = 45 \text{ V} \quad V_{R_2} = 15 \text{ V}$$

$$\text{c) } 180 \text{ W}$$

$$7.4 \quad \text{a) } 10 \text{ } \Omega \quad \text{b) } 5 \text{ A}$$

$$\text{c) } V_{R_1} = 15 \text{ V} \quad V_{R_2} = 25 \text{ V} \quad V_{R_3} = 10 \text{ V}$$

$$7.5 \quad \text{a) } 1,43 \text{ mA} \quad \text{b) } V_{R_1} = 0,29 \text{ V} \quad V_{R_2} = 0,72 \text{ V}$$

$$7.6 \quad \text{a) } 1,98 \text{ } \Omega$$

$$\text{b) } I_1 = 4,5 \text{ A} \quad I_2 = 2,57 \text{ A} \quad I_3 = 2 \text{ A}$$

$$\text{c) } 36 \text{ W}$$

$$7.7 \quad \text{Se deben conectar en paralelo.}$$

7.8 a) $2,83 \, \Omega$ b) $P_{1\Omega} = 3,10 \, \text{W}$ $P_{2\Omega} = 9 \, \text{W}$
c) $12,72 \, \text{W}$

7.9 $V_1 = 18 \, \text{V}$ $V_2 = 12 \, \text{V}$ $I_{6\Omega} = 3 \, \text{A}$

7.10 $I_{32\Omega} = 1,69 \, \text{A}$ $V_{ac} = 28,28 \, \text{V}$

7.11 $V_{2\Omega} = 3,85 \, \text{V}$ $V_{4\Omega} = 6,15 \, \text{V}$
 $V_{10\Omega} = 3,84 \, \text{V}$ $V_{6\Omega} = 2,31 \, \text{V}$

7.12 a) $I_{18\Omega} = 0,78 \, \text{A}$ $I_{36\Omega} = 0,61 \, \text{A}$
 $I_{72\Omega} = 0,17 \, \text{A}$ $I_{54\Omega} = 0,17 \, \text{A}$
 $V_{18\Omega} = 14,04 \, \text{V}$ $V_{36\Omega} = 21,96 \, \text{V}$
 $V_{72\Omega} = 12,24 \, \text{V}$ $V_{54\Omega} = 9,18 \, \text{V}$
b) $26,28 \, \text{V}$ c) $1,56 \, \text{W}$

7.13 a) $15 \, \Omega$ b) $2 \, \text{A}$ c) $60 \, \text{W}$

7.14 a) $I_1 = -2,33 \, \text{A}$ $I_2 = 1,86 \, \text{A}$ $I_3 = -4,19 \, \text{A}$
b) $V_{bc} = -0,84 \, \text{V}$

7.15 a) $P_{20} = 75 \, \text{W}$ $P_{10} = 57,5 \, \text{W}$ $P_8 = 16 \, \text{W}$
b) $-10 \, \text{V}$

7.16 a) $V_{R_2} = 21,74 \, \text{V}$ $V_{R_4} = -9,5 \, \text{V}$
b) $130,20 \, \text{W}$

7.17 a) $P_{R_1} = 11,83 \, \text{W}$ $P_{R_2} = 8,82 \, \text{W}$
 $P_{R_3} = 17,71 \, \text{W}$ $P_{R_4} = 14,59 \, \text{W}$
 $P_{R_5} = 0,50 \, \text{W}$
b) $P_{V_1} = 17,2 \, \text{W}$ $P_{V_2} = 36,24 \, \text{W}$

7.18 a) $I_{ab} = 3,81 \, \text{A}$ $I_{bc} = 1,74 \, \text{A}$
b) $V_{2\Omega} = 7,62 \, \text{V}$ $V_{4\Omega} = 6,96 \, \text{V}$

7.19 a) $I_{2\Omega} = 3,81 \, \text{A}$ $I_{5\Omega} = 2,07 \, \text{A}$ $I_{9\Omega} = 1,63 \, \text{A}$
 $I_{4\Omega} = 1,74 \, \text{A}$ $I_{1\Omega} = 3,37 \, \text{A}$
b) $V_{bc} = 6,96 \, \text{V}$

7.20 $V_1 = 13,15 \, \text{V}$

7.21 $V_{mn} = -94 \, \text{V}$

8.1 $\vec{F}_{mag.} = 3,2 \cdot 10^{-13} (-\vec{k}) \, \text{N}$

8.2 $\vec{B} = -1,31 \cdot 10^{-2} \vec{i} \, \text{T}$

8.3 $\theta = 45,91^\circ$

8.4 $I = 1,08 \, \text{A}$

8.5 a) 90° b) $\vec{F}_{mag.} = -4,32 \cdot 10^{-14} \vec{j} \, \text{N}$
c) $20,48^\circ$ d) $69,52^\circ$
e) $130 \, \text{eV}$ f) $130 \, \text{eV}$

8.6 a) $10,43 \, \text{N}$ b) $10,80$ c) $7,64 \, \text{N}$

8.7 a) $4,8 \cdot 10^{-3} \, \text{Am}^2$ b) $\tau = 2,4 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm}$

8.8 a) $\vec{\mu} = 5,53 \cdot 10^{-2} (-\vec{k}) \, \text{A m}^2$
b) $\tau = 8,01$, $\varphi = -30^\circ$

8.9 a) $F_a = 286,38 \, \text{N}$; $F_b = 675 \, \text{N}$
b) $\tau = 214,78 \, \text{Nm}$
c) La espira gira contrareloj alrededor de Y.
d) $\tau = 214,78 \, \text{Nm}$

8.10 a) $F_a = 331,76 \, \text{N}$; $F_b = 675 \, \text{N}$
b) $\vec{\tau} = 174,6 \vec{j}$

8.11 a) $v = 9,22 \cdot 10^7 \, \text{m/s}$
b) $\omega = 2,63 \cdot 10^{19} \, \text{rad/s}$
c) $T = 2,38 \cdot 10^{-9} \, \text{s}$ d) $f = 4,2 \cdot 10^8 \, \text{Hz}$

8.12 a) $r = 2,04 \cdot 10^{-4} \, \text{m}$ b) $N_v = 8,43 \cdot 10^6$

8.13 a) La fuerza sobre el protón es igual a la fuerza sobre el electrón, pero de dirección contraria. La fuerza sobre el deuterón es igual a la del protón. La fuerza sobre la partícula alfa es el doble de la del protón.

b) La aceleración del electrón es 1.836 veces la aceleración del protón. La aceleración del deuterón es dos veces menor que la aceleración del protón. La aceleración de la partícula alfa dos veces menor que la del protón.

c) El radio de la trayectoria circular descrita por el electrón es 1.836 veces menor que el radio de la trayectoria del protón. El radio de la trayectoria circular descrita por el deuterón es 2 veces mayor que el radio de la trayectoria descrita por el protón. El radio de la trayectoria circular descrita por la partícula α es el doble del radio de la trayectoria descrita por el protón.

8.14 a) $r = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ b) $p = 4,73 \text{ cm}$

9.1 $I = 50 \text{ } \mu\text{A}$

9.2 $I = 0,4 \text{ mA}$

9.3 Añadiendo una resistencia en serie de $66,7 \text{ K}\Omega$.

9.4 $R_1 = 49,95 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 99,95 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 149,95 \text{ k}\Omega$

9.5 a) $f = 7,62 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

b) $v_{\text{máx}} = 57,49 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

c) $E_c = 17,5 \text{ MeV}$

9.6 a) $B = 1,31 \text{ T}$ b) $E_c = 4,21 \text{ MeV}$

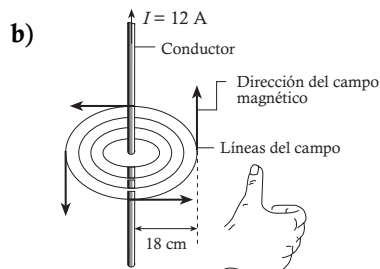
c) $v = 20,08 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

9.7 a) $E_{ca} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ KeV}$ b) $v = 3,51 \cdot 10^7 \text{ m/s}$

9.8 $B = 5,84 \cdot 10^{-4} \text{ T}$

10.1 $B = 12,52 \text{ T}$

10.2 a) $B = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ T}$



10.3 a) $B_T = 38,8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$

b) $B = 3,38 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

10.4 $B = 1,40 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

10.5 a) $\mu = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ Am}^2$

b) $B_x = 3,68 \cdot 10^{-14} \text{ T}$

c) $B = 19,78 \cdot 10^{-7} \text{ T}$

10.6 a) $B_T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

b) El campo nunca es igual a cero.

10.7 $B_P = 4,02 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

10.8 a) $B_A = 8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ b) $B_A = 3,22 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

c) $B_C = 2,62 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

10.9 a) $B = 3,40 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ b) $N = 71,25 \text{ vueltas}$

10.10 $N = 5.968 \text{ vueltas}$

10.11 a) $N = 191 \text{ vueltas}$ b) $L_T = 11,28 \text{ m}$

10.12 $I = 0,67 \text{ A}$

11.1 $B = 132,64 \text{ T}$

11.2 a) $\Phi_{\text{mag}} = 19,6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$

b) $\Phi_{\text{mag}} = 17,05 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$

c) $\Phi_{\text{mag}} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$

d) $\Phi_{\text{mag}} = 0$

11.3 $\mathcal{E} = -1,28 \text{ V}$

11.4 a) $\mathcal{E} = -14,12 \text{ V}$ b) $\mathcal{E} = 28,24 \text{ V}$

c) $\mathcal{E} = 56,48 \text{ V}$ d) $\mathcal{E} = 28,24 \text{ V}$

e) $\mathcal{E} = 56,48 \text{ V}$

11.5 a) $\mathcal{E} = -28,13 \text{ V}$

$I = 1,56 \text{ A}$; contrareloj

Fuerza sobre lado derecho de $25 \text{ cm} = 0,29 \text{ N}$; Dirigida hacia la izquierda.

Fuerza sobre los lados de $15 \text{ cm} = 0,18 \text{ N}$, opuestas y dirigidas hacia el centro de la espira.

b) $\mathcal{E} = I = F = 0$

- c) $\mathcal{E} = -28,13 \text{ V}$
 $I = 1,56 \text{ A}$; corriente en el sentido de giro de las agujas del reloj.
 Fuerza sobre lado izquierdo de $25 \text{ cm} = 0,29 \text{ N}$. Dirigida hacia la izquierda.
 Fuerza sobre los lados de $15 \text{ cm} = 0,18 \text{ N}$, opuestas y dirigidas hacia fuera de la espira.
- d) Bobina entrando: portadores de carga positiva se mueven hacia arriba, contrareloj.
 Bobina dentro del campo: portadores de carga positiva se mueven hacia arriba en los lados verticales de la bobina, anulando la corriente.
- 11.6 $\Delta V = 4,21 \text{ V}$. Extremo C a más alto potencial.
- 11.7 a) $\mathcal{E} = 0,9 \text{ V}$. Corriente hacia arriba en la barra deslizante.
 b) $F_{\text{externa}} = 0,82 \text{ N}$
 c) Ambas potencias son iguales a $2,19 \text{ W}$.
- 11.8 $B = 5,47 \text{ T}$
- 11.9 $\mathcal{E}_{\text{autoinducción}} = -0,49 \text{ V}$
- 11.10 $\frac{\Delta I}{\Delta t} = -0,25 \text{ A/s}$
- 11.11 a) $\Phi_{\text{mag}} = 60 \text{ Wb}$ b) $\mathcal{E}_{\text{autoind.}} = -2,580 \text{ V}$
- 11.12 a) $M_{12} = 6,66 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
 b) $\mathcal{E}_{\text{fc}} = -0,5 \text{ V}$
 c) $\frac{\Delta \Phi_{\text{mag}}}{\Delta t} = 10,60 \cdot 10^{-6} \text{ Wb/s}$
- 11.13 $f = 57,87 \text{ Hz}$
- 11.14 $\mathcal{E}_{2\text{máx}} = 150 \text{ V}$
- 11.15 a) $\mathcal{E}_{\text{fc}} = 60 \text{ V}$ b) $I = 40 \text{ A}$
- 11.16 a) $I = 8 \text{ A}$ b) $I = 24 \text{ A}$
- 11.17 a) $I_2 = 9 \text{ A}$ b) $V_2 = 24 \text{ V}$
- 12.1 a) $\omega = 314,16 \text{ rad/s}$ $T = 20 \text{ ms}$
 b) $V_m = 311,13 \text{ V}$
- 12.2 a) $\varphi = 45^\circ$ b) $I_{\text{rms}} = 1,21 \text{ A}$
 c) Diferencia fase = 0°
- 12.3 a) $I_{\text{máx}} = 1,2 \text{ A}$ b) $\omega = 377 \text{ rad/s}$
- 12.4 a) $21,21 \angle 20^\circ$ b) $7,07 \angle 0^\circ$
 c) $109,60 \angle (-75^\circ)$
- 12.5 a) $v(t) = 125\sqrt{2} \text{ sen } 377t$
 b) $v(t) = 30\sqrt{2} \text{ sen}(377t - 40^\circ)$
 c) $v(t) = -100\sqrt{2} \text{ sen } 377t$
 d) $v(t) = 48,37\sqrt{2} \text{ sen}(377t + 60,26^\circ)$
 $v(t) = 21,63\sqrt{2} \text{ sen}(377t + 146,31^\circ)$
 e)
 f) $v(t) = 18,87\sqrt{2} \text{ sen}(377t - 57,99^\circ)$
- 12.6 a) $V = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle (-45^\circ)$
 b) $I = 0,32 \angle (-45^\circ)$ $i(t) = 0,45 \text{ sen}(377t - 45^\circ)$
 c) $I_{\text{rms}} = 0,32 \text{ A}$
- 12.7 $I_1 = 17,68 \angle (-30^\circ)$ $I_2 = 5,66 \angle 60^\circ$
 $i(t) = 26,25 \text{ sen}(377t - 12,25^\circ)$
- 12.8 a) $V \cdot Z = 3.300 \angle (-40^\circ)$ $\frac{V}{Z} = 3,67 \angle 40^\circ$
 b) $V \cdot Z = 939,40 \angle 69,44^\circ$ $\frac{V}{Z} = 12,88 \angle (-69,44^\circ)$

- 12.9** a) $i(t) = 67,88 \text{ sen } 628,32t$ b) $I = 2,67 \text{ A}$ **12.17** Circuito de la fig. 12.33(a):
- 12.10** a) $X_L = 37,70 \text{ } \Omega$ b) $V_L = 2,92 \text{ A}$ a) $Z = 136,39 \angle 44,69^\circ$
 c) $\varphi = 90^\circ$ b) $I = 0,81 \angle (-44,69^\circ)$
- 12.11** a) $L = 66,31 \text{ mH}$ b) $\omega = 1.005,43 \text{ rad/s}$ c) $i_L(t) = 1,15 \text{ sen}(377t - 44,69^\circ)$
- 12.12** a) $v(t) = 50 \text{ sen } 628,32t$ b) $V = 35,36 \angle 0^\circ$ $i_R(t) = 1,13 \text{ sen}(377t - 57,74^\circ)$
 c) $X_L = 6,28 \text{ } \Omega$ d) $Z = 40,49 \angle 8,92^\circ$ $i_C(t) = 0,20 \text{ sen}(377t + 35,26^\circ)$
 e) $I = 0,87 \angle (-8,92^\circ)$ d) $V_L = 91,61 \angle 45,31^\circ$
 f) $V_R = 34,8 \angle (-8,92^\circ)$ $V_L = 5,46 \angle 81,08^\circ$ $V_R = V_C = 79,49 \angle (-55,02^\circ)$
 g) $i(t) = 1,23 \text{ sen}(628,32t - 8,92^\circ)$ e) $P = 63,34 \text{ W}$
 h) $i(t) = 1,23 \text{ A}$ Circuito de la fig. 12.33(b):
- 12.13** a) $f = 45,94 \text{ Hz}$ b) $Z = 11,55 \angle 29,98^\circ$ a) $Z = 81,65 \angle 35^\circ$
 c) $FP = 0,87$ d) $P = 15,07 \text{ W}$ b) $I = 1,35 \angle (-35^\circ)$
 e) $P = 15,07 \text{ W}$ c) $i_L(t) = 1,37 \text{ sen}(377t - 90^\circ)$
- 12.14** a) $X_C = 256,25 \text{ } \Omega$ b) $I = 0,43 \text{ A}$ $i_R(t) = 1,56 \text{ sen } 377t$
 c) $Q_{\max} = 0,016 \text{ C}$ $i_C(t) = 0,28 \text{ sen}(377t + 90^\circ)$
- 12.15** a) $X_C = 564,37 \text{ } \Omega$ b) $Z = 576,99 \angle (-78^\circ)$ d) $V_R = V_C = V_L = 110 \angle 0^\circ$
 c) $I = 0,35 \angle 78^\circ$ $i(t) = 0,49 \text{ sen}(377t + 78^\circ)$ e) $P = 121 \text{ W}$
 d) $\cos \theta = 0,21$ e) $P = 14,7 \text{ W}$
 f) $P = 14,7 \text{ W}$
- 12.16** a) $X_L = 188,5 \text{ } \Omega$ b) $X_C = 390,08 \text{ } \Omega$
 c) $Z = 225,02 \angle (-63,61^\circ)$ d) $\varphi = 63,61^\circ$
 e) $I = 0,8 \angle 63,61^\circ$ f) $P = 64,45 \text{ W}$
 g) $P = 64,45 \text{ W}$

Índice Analítico

A

Aislantes 6
 materiales 6
Amperímetros 160
Ángulo de fase 224
Átomos 1
Autoinducción 204

B

Baterías 94
Blindaje electrostático 45

C

Campo eléctrico 25, 26, 30, 33
 de una carga puntual 26
 definición de 25
 líneas de fuerza del 30
 uniforme 33
Campo magnético
 de cargas puntuales en movimiento 175
 de un solenoide 181
 de un toroide 182
 en el centro de una espira circular 178
 en el eje de una espira circular 179
 en un conductor recto 176
 naturaleza del 133
Capacitancia 73
 de un capacitor plano 74
 de un capacitor esférico 76
 de un capacitor cilíndrico 75
Capacitor
 energía en un 80
 onda alterna aplicada a un 235
Capacitores 73
Capacitores en paralelo 82
Capacitores en serie 83
Carga 5, 6
 conservación de la 5
 cuantización de la 5
 ley de conservación de la 6
 neta 6
Carga del electrón 5
Carga eléctrica 3, 4

Ciclotrón 165
Circuito RL
 onda alterna en un 233
Circuito serie RLC
 onda alterna aplicada a 237
Conductancia 114
Conductividad eléctrica 99
Conductores 6, 43
 en un campo eléctrico 43
 materiales 6
Constante dieléctrica 19, 78
Corriente alterna sinusoidal 221
Corriente continua 98
Corriente eléctrica 91
 efectos de la 92
Corriente variable 98
Corrientes de malla
 método de las 123
Coulomb
 ley de 13
 unidad de carga eléctrica 5
Cuantización de la carga 5

D

Densidad de corriente 98
Dieléctrico en un capacitor 77
Diferencia de fase 225
Diferencia de potencial 57
 en un campo eléctrico uniforme 59

E

Efecto fotoeléctrico 94
Electricidad estática 10
Electroimán 186
Electrón masa del 2
Electrones 1
Electroscopio 9
Energía eléctrica 102
Energía en un capacitor 80
Energía potencial eléctrica 52
Equipotenciales
 superficies 68
Estructura atómica de la materia 1

F

Fasores 226
Fem de movimiento 198
Fem inducida 195
Flujo eléctrico 38, 39
Flujo magnético 191
Fuentes de energía eléctrica 110
Fuerza electromotriz 111
Fuerza magnética entre dos conductores 180
Fuerza magnética sobre un conductor 140
Fuerza magnética sobre una espira 143
Fuerzas líneas de 26
Fuerzas fundamentales de la naturaleza 2

G

Galvanómetro 157
 sensibilidad de un 158
Gauss ley de 41
Generador de corriente alterna 208
Generador de corriente directa 209, 210

H

Hidrógeno átomo de 1

I

Imanes 131, 132
Impedancia 234
Inducción electrostática 8
Inductancia 205
Inductancia mutua 206
Inductor
 onda alterna en un 232
Interacción débil 2
Interacción electromagnética 2
Interacción fuerte 2
Interacción gravitacional 3

K

Kirchhoff
 primera ley de 115
 segunda ley de 115

L

Ley de Biot-Savart 173
Ley de Coulomb 13, 16
 forma vectorial de la 16
Ley de Faraday 193

Ley de Gauss 41
Ley de Lenz 196
Ley de Ohm 99
Leyes de Kirchhoff 113
Líneas de fuerza 26, 30

M

Magnético flujo 191
Magnetismo 130
Masa del electrón 2
Masa del neutrón 2
Masa del protón 2
Materiales diamagnéticos 184
Materiales diamagnéticos 184
Materiales paramagnéticos 184
Medida de la relación carga/masa 169
Moléculas 1
Momento de torsión sobre una espira 145
Momento dipolar magnético 148
Motor de corriente alterna 210
Motor de corriente directa 210

N

Neutrón masa del 2
Neutrones 1
Núcleo atómico 1

P

Partícula cargada en un campo magnético 149
Permitividad eléctrica 14
Piezoelectricidad 93
Potenciómetro 164
Potencia en circuitos de corriente alterna 241
Potencial
 debido a cuerpos esféricos cargados 66
 debido a una carga puntual 62
 diferencia de 57
Potencial absoluto 61
Potencial en un punto 54
Producto vectorial de dos vectores 136
Protón masa del 2
Protones 1
Puente de Wheatstone 164

R

Resistencia dieléctrica 79
Resistencia eléctrica 100
Resistores en paralelo 119

Resistividad 100
Resistores en paralelo 119
Resistores en serie 118

S

Sistema de cargas 65
Superficie gaussiana 42
Superficies equipotenciales 68

T

Termoelectricidad 93
Transformador 212
Tubo de rayos catódicos 37, 168

V

Valor eficaz de una onda alterna sinusoidal 231
Valor promedio de una onda alterna sinusoidal
230
Voltímetros 162